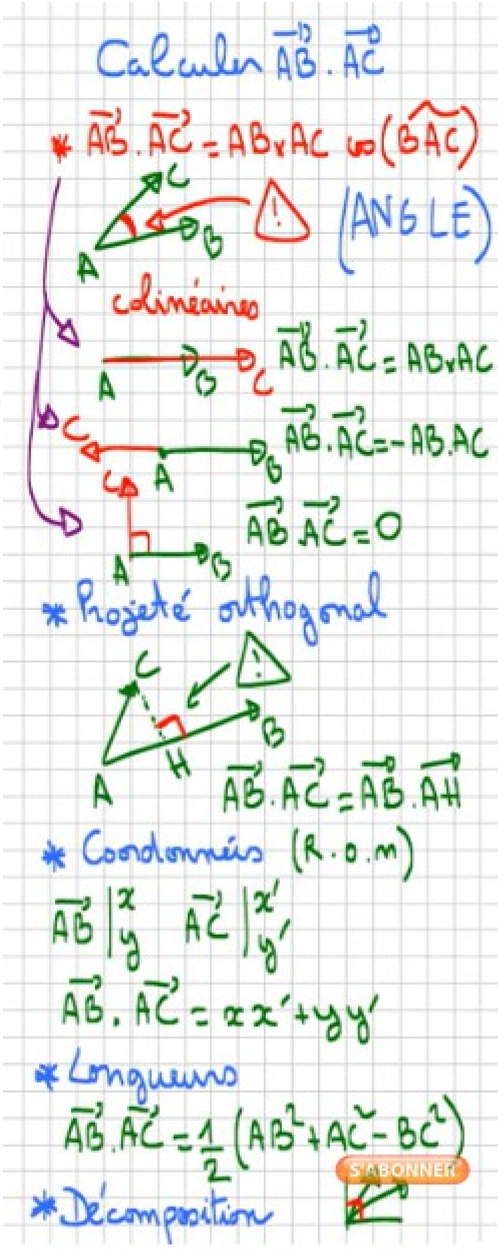
Cours : Produit scalaire de l'espace

I) Produit scalaire dans l'espace

Deux vecteurs peuvent toujours être représentés par trois points A, $B=A+\vec{u}$ et $C=A+\vec{v}$.
Ces trois points sont coplanaires (trois points sont toujours coplanaires, et le plan (ABC) est unique si les trois points ne sont pas alignés). On peut donc définir le produit scalaire dans l'espace $\vec{u}.\vec{v}$ comme étant égal au produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ dans le plan (ABC).

On peut donc étendre aux vecteurs de l'espace la définition et les propriétés du produit scalaire de deux vecteurs vues dans le plan.



$$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$$

$$\vec{u}^2=\vec{u}.\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$$

$$\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$$

$$(\lambda\vec{u}).\vec{v}=\vec{u}.(\lambda\vec{v})=\lambda(\vec{u}.\vec{v})$$

$$\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$$

$$(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$$

$$\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$$

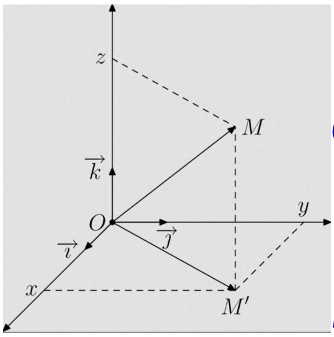
On se place dans un repère $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On aimerait également avoir une formule avec des coordonnées mais comme dans l'espace nous avons trois coordonnées, on ne peut pas juste prendre la même formule (xx'+yy').

Propriété 1 :

Soit un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Démonstration :



Soit le point M tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$ *et M' le projeté orthogonal de M sur le plan (Oxy).*

M' a pour coordonnée (x,y) dans le plan (Oxy), donc $OM'=\sqrt{x^2+y^2}$

$\|\vec{u}\|=OM$ *or le triangle OMM' est rectangle en M' donc, d'après le théorème de Pythagore,*

$OM^2=OM'^2+MM'^2$.

Et comme $MM'=z$ *, nous obtenons* $OM^2=x^2+y^2+z^2$ *et finalement*

$$\|\vec{u}\|=OM=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Propriété 2 :

Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$. $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

Démonstration :

$$\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2+x'^2+y'^2+z'^2-(x-x')^2-(y-y')^2-(z-z')^2)$$

$$=\frac{1}{2}(2xx'+2yy'+2zz')$$

$$=xx'+yy'+zz'$$

II) Orthogonalité

Définition :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si $\vec{u}.\vec{v}=0$

Définition :

On appelle base orthonormée de l'espace, trois vecteurs de normes 1 et orthogonaux deux à deux.

Propriété :

On considère deux droites D et D' admettant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ comme vecteurs directeurs.

Ces deux droites sont orthogonales si et seulement si $\vec{u}.\vec{v}=0$

Démonstration : Evident si on se rappelle la définition de deux droites orthogonales :

" Deux droites sont orthogonales si leurs parallèles passant par un point quelconque sont perpendiculaires." Et on sait que deux droites perpendiculaires sont coplanaires et donc, programme de première S, deux droites sont perpenticulaires si et seulement si le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs est nul.

Propriété :

Soit une droite (*d*) de vecteur directeur $\vec{u}$ et un plan *P* dirigé par un couple de vecteurs $(\vec{v}, \vec{w})$

1. (*d*) et *P* sont orthogonaux si et seulement si pour tous points M et N de P, $\vec{u}.\overrightarrow{MN}=0$

2. (*d*) et *P* sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v}=0$ et $\vec{u}.\vec{w}=0$

Démonstration :

1. Par définition, dire que (d) et P sont orthogonaux signifie que toute droite de P est orthogonale à (d).
Soient M et N deux points du plan P. (MN) est donc orthogonale à (d) et $\vec{u}.\overrightarrow{MN}=0$

2. Condition nécessaire :

$\vec{v}\in P$ *donc il existe deux points A et B de P tels que* $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ *et d'après 1.,* $\vec{u}.\overrightarrow{AB}=0$ *donc* $\vec{u}.\vec{v}=0$

$\vec{w}\in P$ *donc il existe deux points C et Dde P tels que* $\vec{w}=\overrightarrow{CD}$ *et d'après 1.,* $\vec{u}.\overrightarrow{CD}=0$ *donc* $\vec{u}.\vec{w}=0$

Condition suffisante :

Soient deux points M et N de P.
Nous voulons montrer que $\vec{u}.\overrightarrow{MN}=0$
Il existe deux réels α et β *tels que* $\overrightarrow{MN}=\alpha\vec{v}+\beta\vec{w}$ *car* $(\vec{v},\vec{w})$ *sont des vecteurs directeurs de P.*
Ainsi $\vec{u}.\overrightarrow{MN}=\vec{u}.(\alpha\vec{v}+\beta\vec{w})=\alpha\vec{u}.\vec{v}+\beta\vec{u}.\vec{w}=0$
(d) est orthogonale à toute droite de P donc (d) et P sont orthogonaux.

Rappel : Perpendiculaire = Orthogonale + sécante

Dans $\mathbb{R}^3$: - deux droites orthogonales ne sont pas forcément perpendiculaires
- une droite et un plan orthogonaux sont forcément perpendiculaires

III) Vecteur normal à un plan

Définition :

Un vecteur non nul $\vec{n}$ est un vecteur normal à un plan P s'il est le vecteur directeur d'une droite orthogonale à ce plan.

Propriété :

$\vec{n}$ est un vecteur normal à un plan P $\Leftrightarrow \forall A, B\in(P), \vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$

Propriété :

Soit A un point et $\vec{n}$ un vecteur non nul.
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ est le plan passant par A de vecteur normal $\vec{n}$.

Comment montrer qu'un vecteur est normal à un plan ?

Il faut trouver deux vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ non colinéaires du plan tels que $\vec{n}.\vec{u}=0$ et $\vec{n}.\vec{v}=0$

Comment trouver un vecteur normal à un plan ?

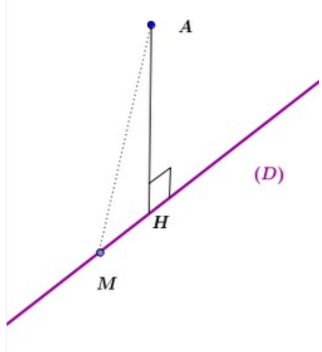
Ici on connaît deux vecteurs directeurs du plan $\vec{u},\vec{v}$.

Il faut chercher $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ tel que $\begin{cases}\vec{n}.\vec{u}=0\\\vec{n}.\vec{v}=0\end{cases}$. *Cela nous ramène à la résolution d'un système.*

IV) Projection orthogonale

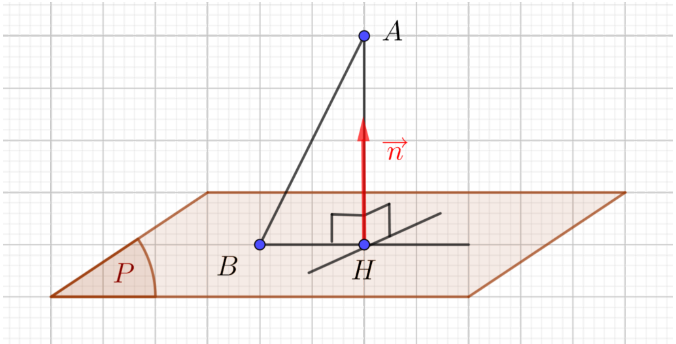
Projeté sur une droite:

On appelle projeté orthogonal de A sur (d) le point H tel que (AH) et (d) soient perpendiculaire.



Projeté sur un plan:

On appelle projeté orthogonal de A sur P le point H tel que (AH) et P soient perpendiculaire.



Propriété :

H est le point du plan P le plus proche de A
AH est la distance entre A et P

Démonstration :
Elle se fait comme dans le plan. Soit un point B du plan différent de H.
On justifie que (BH) et (AH) sont perpendiculaires.
Donc ABH est un triangle rectangle en H. AB est l'hypoténuse donc AB > AH.

Le projeté nous permet ainsi de calculer la distance d'un point à un plan (ou une droite)
Il faudra trouver les coordonnées du projeté (en résolvant un système généralement).

Exemple Calculons la distance entre G et (BED)
source : https://www.maths-et-tiques.fr/telech/20Esp2.pdf