Cours: Calcul littéral I

Pendant très longtemps, les propriétés étaient démontrées (ou plutôt illustrées) à partir de valeurs particulières. L'idée de remplacer les nombres par des lettres arrivera bien plus tard.
En 1591, François Viète publie un nouvel ouvrage qui représente une avancée considérable pour l'algèbre. Le calcul littéral trouve ses bases dans le but de résoudre tout problème. Les grandeurs cherchées sont désignées par des lettres.

I) Avec des lettres

Définition: Un calcul littéral est un calcul avec des lettres. Ces lettres peuvent prendre différentes valeurs, donc elles varient; c'est pourquoi on les appelle **variables**.

Attention : une lettre en majuscule suivi d'un = est le nom du calcul, les variables sont en minuscules.

Exemple :

On sait que A=a+b
Calculer A pour:

$a=3\,;b=5$ $\qquad A=3+5=8$

$a=-7\,;b=8$ $\qquad A=-7+8=1$

$$B=y(y-1)+\frac{y^2}{(2+y)}$$

Calculer B pour $y=0$ et pour $y=-1$

Si $y=0$ alors $B=0\times(0-1)+\dfrac{0^2}{(2+0)}=0+0=0$

Si $y=-1$ alors $B=(-1)\times((-1)-1)+\dfrac{(-1)^2}{(2+(-1))}=2+1=3$

A quoi cela sert-il?
Cela nous permet de faire des calculs sans connaître la valeur d'un nombre (équations).
Cela nous permet de faire une démonstration d'une conjecture dans le cas général, on fait les calculs avec une lettre et le résultat est valable pour tous les nombres.
Cela nous permet de gagner beaucoup de temps en travaillant sur ordinateur ou sur une calculatrice.

II) Réduction

Définition : Réduire un calcul, c'est l'écrire sous la forme la plus simple.

Méthode :

1) On enlève toutes les parenthèses
2) On enlève tous les $\times$
3) On regroupe ensemble les termes de même nature i.e. qui se ressemblent (même lettre, même puissance)

L'étape 1) ne sera vue que plus tard dans l'année, sur ce chapitre nous travaillerons uniquement les étapes 2 et 3.

Etape 2:

Pour enlever les $\times$, s'il est entre deux nombres, on calcule.
s'il est entre deux lettres identiques, on utilise des puissances.
s'il est entre deux lettres différentes, on l'efface.

Exemples :

$A=2\times6+7\times y$ $\quad$ $B=x\times x$ $\quad$ $C=a\times c\times b$

$A=12+7y$ $\quad$ $B=x^2$ $\quad$ $C=abc$

$D=7\times y\times3x$ $\quad$ $E=11\times x\times63\times x$ $\quad$ $F=x\times x+7x\times2$

$D=21xy$ $\quad$ $E=693x^2$ $\quad$ $F=x^2+14x$

$$G=-3\times(-7a^2)\times(-3)\times a\times(-5a^3)\times(-2a^{10})\times(-a)^6=-630a^{22}$$

Attention à compter les moins correctement pour déterminer le signe du résultat, il y a 11 signes moins dans ce calcul.

Remarque :

On mettra les lettres dans l'ordre alphabétique.

Etape 3 :

On regroupe les termes de même nature, on calcule les termes (les groupes entre les + et les -) qui ont les mêmes variables (avec les même puissances).

$H=2x+3x-7x$ $\quad$ $I=5y+3x-2y+7x$ $\quad$ $J=11x^2-2x+5x^2$

$H=-2x$ $\quad$ $I=10x+3y$ $\quad$ $J=16x^2-2x$

S'il n'y a pas de nombres devant la lettre, il faut compter 1 car $1x=x$:

$K=x+5x$ $\quad$ $L=y^2+5x-3y^2+x$ $\quad$ $M=7ab+ab-5a+17ab$

$K=6x$ $\quad$ $L=-2y^2+6x$ $\quad$ $M=25ab-5a$

III) Utilisation

On réduit un calcul pour le simplifier, on s'en sert pour comparer deux écritures littérales.

Est-ce que $A=n^2-1+7$ donne toujours le même résultat que $B=n^2-2n-2+n+n+8$?

Vérifions sur un exemple, choisissons $n=7$ et calculons A et B.

$A=7^2-1+7$	$B=7^2-2\times7-2+7+7+8$
$A=49+6$	$B=49-14+20$
$A=55$	$B=55$

On trouve effectivement le même résultat, est-ce que cela marche pour tout les nombres n ? Il faut le démontrer. Nous allons réduire chaque calcul :

$A=n^2-1+7=n^2+6$

$B=n^2-2n-2+n+n+8=n^2+6$

On trouve le même calcul réduit pour les deux expressions, elles sont donc identiques et peut importe le nombre n que vous choisissez au départ, vous trouverez le même résultat.