

Cours : Fonction dérivée

I) Fonction dérivée

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Si pour tout a de I , f est dérivable en a alors on dit que f est dérivable sur I .

La fonction qui à un réel x associe le nombre $f'(x)$ est appelé fonction dérivée de f .

Fonction	Fonction dérivée
$k \in \mathbb{R}$	
$ax + b$	
x^n	
$\frac{1}{x}$	
$\frac{1}{x^n}$	
$\sqrt{x}$	
$\cos x$	
$\sin x$	

Démonstration :

1 - $f(x) = k$ donc pour $x, h \in \mathbb{R}$, $TA = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{k - k}{h} = 0$

et $f'(x) = 0$

2 - $f(x) = ax + b$ donc pour $x, h \in \mathbb{R}$,

$$TA = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a(x+h) + b - (ax + b)}{h} = \frac{ah}{h} = a \quad \text{et} \quad f'(x) = a$$

II) Opération sur les dérivées

On considère deux fonctions dérivables u et v .

Propriété :

$$\forall k \in \mathbb{R}; (ku)' = k u'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

$$(u \times v)' = u'v + uv'$$

Démonstration :

Soient deux fonctions u et v dérivables.

1) Soit un réel k .

$$\frac{k u(x+h) - k u(x)}{h} = k \times \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

Donc lorsque h tend vers zéro : $(ku)' = k u'$

2)

$$\frac{(u+v)(x+h) - (u+v)(x)}{h} = \frac{u(x+h) + v(x+h) - u(x) - v(x)}{h} = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

Donc lorsque h tend vers zéro : $(u+v)' = u' + v'$

3)

$$\begin{aligned} \frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h} &= \frac{u(x+h) \times v(x+h) - u(x) \times v(x)}{h} \\ &= \frac{u(x+h) \times v(x+h) - u(x+h) v(x) + u(x+h) v(x) - u(x) \times v(x)}{h} \end{aligned}$$

$$= u(x+h) \times \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + v(x) \times \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

Donc lorsque h tend vers zéro : $(u \times v)' = u \times v' + v \times u'$

4)

$$\begin{aligned} \frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{h} &= \frac{\frac{u(x+h)v(x)}{v(x+h)v(x)} - \frac{u(x)v(x+h)}{v(x)v(x+h)}}{h} \\ &= \frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x+h)}{h} \times \frac{1}{v(x)v(x+h)} \\ &= \frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x) + u(x)v(x) - u(x)v(x+h)}{h} \times \frac{1}{v(x)v(x+h)} \\ &= \frac{v(x)(u(x+h) - u(x)) + u(x)(v(x) - v(x+h))}{h} \times \frac{1}{v(x)v(x+h)} \end{aligned}$$

Donc lorsque h tend vers zéro : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v u' - u v'}{v^2}$

III) Composition de fonctions

Définition : On dit qu'une fonction g est la composée de deux fonctions f et h si l'image de x par la fonction g se calcule en appliquant d'abord l'une des deux fonctions puis en appliquant au résultat la deuxième fonction. On note $g = f \circ h$ (on lit f rond h).

Ainsi $g(x) = f \circ h(x) = f[h(x)]$

Par exemple, a) $g(x) = \sqrt{5x^2 + 2} = f \circ g(x)$

avec $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = 5x^2 + 2$

b) $g(x) = \frac{-8}{3 \sin x} = f \circ g(x)$

avec $f(x) = \frac{-8}{x}$ et $g(x) = 3 \sin x$

Propriété :

Soient u et f deux fonctions continues.

$$(f \circ u)' = u' \times (f' \circ u)$$

Aussi noté $[f(u)]' = u' \times f'(u)$

Démonstration : Admise

Cette propriété nous permet de généraliser toutes les formules de notre tableau.
Soit u une fonction.

Fonction	Fonction dérivée
u^n	$n u' u^{n-1}$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{1}{u^n}$	$-n \frac{u'}{u^{n+1}}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\cos u$	$-u' \sin u$

Application :

Déterminer la dérivée de $g(x) = \sqrt{5x^2 + 2}$

Notons $u = 5x^2 + 2$

$u' = 10x$ or on a $g = \sqrt{u}$ donc $g' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Finalement

$$g'(x) = \frac{10x}{2\sqrt{5x^2 + 2}} = \frac{5x}{\sqrt{5x^2 + 2}}$$