

# Cours : Equation paramétriques

Nous n'avons pas encore d'équation pour décrire une droite de l'espace (les équations du type  $y=ax+b$  ou  $x=a$  sont des équations d'une droite dans un plan).

Une équation cartésienne est une équation reliant les variables  $x, y$  et  $z$  (une variable par dimension).

Des équations paramétriques sont des équations exprimant  $x, y, z$  à l'aide d'une ou plusieurs autres variables appelées paramètres.

## I) Représentation paramétrique

Soit un repère de l'espace. On considère un point  $A$  et un vecteur  $\vec{u}=(a, b, c)$ .

La droite  $(d)$  passant par  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u}$  est l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que :

$$\vec{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \quad \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \vec{AM} = t\vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} /$$

$$\begin{cases} x_M = x_A + ta \\ y_M = y_A + tb \\ z_M = z_A + tc \end{cases}$$

**Définition :**

Ce système est une représentation paramétrique de la droite  $(d)$ . ( $t$  est le paramètre)

**Définition :**

Soit un point  $A$  et deux vecteurs  $\vec{u}=(a, b, c)$  et  $\vec{v}=(a', b', c')$ . Notons  $P$  le plan passant par  $A$  et dirigé par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

$M$  est un point de  $P$  si et seulement si il existe deux réels  $s$  et  $t$  tels que :

$$\vec{AM} = t\vec{u} + s\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = x_A + ta + sa' \\ y_M = y_A + tb + sb' \\ z_M = z_A + tc + sc' \end{cases}$$

**Remarque :**

Il existe une infinité de vecteurs directeurs donc il existe une infinité de représentations paramétriques.

Peut-on trouver une représentation paramétrique d'un plan ?

Oui mais nous ne nous en servons pratiquement jamais.

## II) Equation cartésienne d'un plan

### Propriété 1:

Soit un plan P de vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  non nul.

Il existe un réel  $d$  tel que

$$\forall M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P, ax + by + cz + d = 0$$

### Propriété 2: La réciproque

Si  $a, b, c$  sont trois réels non tous nuls alors l'ensemble des points  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  tels que

$ax + by + cz + d = 0$  est un plan de vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ .

Démonstration :

1) Soit  $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$  un point du plan. Donc pour tout point  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  du plan  $\vec{AM}$  et  $\vec{n}$  sont orthogonaux.

Ainsi,  $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$  c'est-à-dire  $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

$$ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$$

en posant  $d = -ax_A - by_A - cz_A$

$$ax + by + cz + d = 0$$

2) Supposons que ce soit le  $a$  qui est non nul, notons  $S$  l'ensemble de points cherchés et appelons  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ .

Premièrement, le point  $A \begin{pmatrix} -d/a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  vérifie l'équation et donc  $A$  appartient à  $S$ .

Ensuite, prenons un point  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  appartenant à  $S$ , donc vérifiant l'équation  $ax + by + cz + d = 0$ .

Remarquons alors que  $\vec{AM} \cdot \vec{n} = (x + \frac{d}{a}) \times a + yb + zb = (ax + by + cz) - d = d - d = 0$

Donc  $\forall M \in S, \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$

Cela démontre que  $S$  est le plan de vecteur normal  $\vec{n}$  passant par le point  $A$ .

Cette équation  $ax + by + cz + d = 0$  est appelée équation cartésienne du plan P. Elle n'est pas unique (comme l'équation cartésienne d'une droite dans le plan).

### Propriété 3: Plans perpendiculaires

Soit un plan  $P_1$  de vecteur normal  $\vec{n}_1$  et un plan  $P_2$  de vecteur normal  $\vec{n}_2$ .

$P_1$  et  $P_2$  sont perpendiculaires si et seulement si  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  sont orthogonaux.

Démonstration : admise

### III) Méthodes

#### Méthode 1 : Déterminer le point d'intersection de deux droites (et s'il y en a un)

Soient 3 droites définies par un point et un vecteur directeur :

$$d_1 : A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad d_2 : B \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et } d_3 : C \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que  $d_1$  et  $d_2$  sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

$$d_1 : \begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x=4t' \\ y=3+8t' \\ z=1+2t' \end{cases} \quad \text{Supposons qu'elles soient sécantes et notons } M \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix} \text{ leur}$$

point d'intersection.

$M$  appartient aux deux droites donc il existe deux réels  $t$  et  $t'$  tels que :

$$M \in d_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 2t \\ y_M = t \\ z_M = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad m \in d_2 : \begin{cases} x_M = 4t' \\ y_M = 3+8t' \\ z_M = 1+2t' \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} 2t=4t' \\ t=3+8t' \\ 0=1+2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t=4t' \\ t=3+8t' \\ t'=-0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ t=-1 \\ t'=-0,5 \end{cases}$$

Nous avons la valeur de  $t=-1$ , que l'on peut remplacer dans  $d_1 : \begin{cases} x_M = 2 \times (-1) = -2 \\ y_M = -1 \\ z_M = 0 \end{cases}$

Finalement  $M \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Montrer que  $d_1$  et  $d_3$  ne sont pas sécantes.

$$d_3 : \begin{cases} x=-2+3t \\ y=5t \\ z=4t \end{cases} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x=4t' \\ y=3-4t' \\ z=1+2t' \end{cases}$$

Supposons qu'elles soient sécantes et notons  $M \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}$  leur point d'intersection.

On obtient alors :

$$\begin{cases} -2+3t=4t' \\ 5t=3-4t' \\ 4t=1+2t' \end{cases} \quad \text{En faisant } L_1+L_2, \quad -2+8t=3 \quad \text{donc} \quad t=\frac{5}{8}$$

$$\text{En remplaçant dans } L_2, \quad 5 \times \frac{5}{8} = 3 - 4t' \quad \text{donc} \quad t' = -\frac{1}{32}$$

On vérifie dans  $L_3$ ,  $4 \times \frac{5}{8} = 1 + 2 \times -\frac{1}{32}$  ce qui donne  $\frac{5}{2} = \frac{15}{16}$  ce qui est faux.

La supposition de départ est donc fautive, **elles ne sont pas sécantes.**

## Méthode 2 : Déterminer le point d'intersection d'une droite et d'un plan

Soit la droite définie par  $d: \begin{cases} x=2-t \\ y=4+t \\ z=-3+2t \end{cases}$  et le plan P défini par  $x-y+2z-1=0$ .

a) Montrer que  $d$  et P sont sécants.

D et P ne sont pas sécants, c'est que  $d$  est parallèle à P (ou confondue) et donc n'importe quel vecteur directeur de  $d$  est orthogonal à n'importe quel vecteur normal de P.

$\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de  $d$  et  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal de P.

Il suffit donc de montrer  $\vec{u}$  et  $\vec{n}$  ne sont pas orthogonaux.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 \times 1 + 1 \times -1 + 2 \times 2 = 2$$

Donc  $d$  et P sont sécants.

b) Déterminer le point d'intersection de  $d$  et P.

Soit  $M \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}$  leur point d'intersection.

On a  $\begin{cases} x_M=2-t \\ y_M=4+t \\ z_M=-3+2t \end{cases}$  car M appartient à  $d$  et  $x_M - y_M + 2z_M - 1 = 0$  car M appartient à P.

En remplaçant,  $(2-t) - (4+t) + 2(-3+2t) - 1 = 0$

$$2 - t - 4 - t - 6 + 4t - 1 = 0$$

$$2t = 9$$

$$t = 4,5$$

En remplaçant cette valeur dans les équations paramétriques de  $d$  :

$$M \begin{pmatrix} 2-4,5 \\ 4+4,5 \\ -3+2 \times 4,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ 8,5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

### Méthode 3 : Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur une droite

Soit la droite définie par  $d: \begin{cases} x=2-t \\ y=4+t \\ z=-3+2t \end{cases}$  et le point  $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

a) Déterminer les coordonnées de H, le projeté orthogonal de A sur d.

H appartient à d donc  $\begin{cases} x_H=2-t \\ y_H=4+t \\ z_H=-3+2t \end{cases}$ .

H appartient au plan perpendiculaire à d passant par A, donc le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  (vecteur directeur de d) est un vecteur normale de ce plan.

On en déduit une équation cartésienne de P :  $-x+y+2z+d=0$

Comme A appartient au plan P :  $-x_A+y_A+2z_A+d=0$  donc  $-2+1+2 \times 0+d=0$  et  $d=1$ .

Donc  $-x+y+2z+1=0$  est une équation cartésienne de P.

Comme H appartient au plan P, on obtient  $-x_H+y_H+2z_H+1=0$

On remplace dans l'équation cartésienne :

$$\begin{aligned} -(2-t)+(4+t)+2(-3+2t)+1 &= 0 \\ -2+t+4+t-6+4t+1 &= 0 \\ 6t &= 3 \\ t &= 0.5 \end{aligned}$$

Et on trouve H reprenant les équations paramétriques :

$$H \begin{pmatrix} 2-0.5 \\ 4+0.5 \\ -3+2 \times 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 4.5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) En déduire la distance entre A et d.

La distance entre A et d est la longueur entre A et le projeté orthogonal de A sur d.

$$AH = \sqrt{(x_A - x_H)^2 + (y_A - y_H)^2 + (z_A - z_H)^2}$$

$$AH = \sqrt{(2 - 1.5)^2 + (1 - 4.5)^2 + (0 + 2)^2}$$

$$AH = \sqrt{0.25 + 12.25 + 4}$$

$$AH = \sqrt{16.5}$$

$$AH \approx 4.06$$