

Fonction polynômes de degré 3

Fonctions polynômes de degré 3

63 Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = -t^3 + 3t^2 + 24t + 28$.

- Vérifier que (-2) et 7 sont racines du polynôme.
- Sachant que (-2) est une racine double et 7 une racine simple, déterminer la forme factorisée de la fonction f .
- En déduire le signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Une épidémie de varicelle s'est déclarée dans les crèches d'une commune. On observe son évolution dans le temps. Un relevé hebdomadaire effectué par le service communal d'hygiène et de santé a permis d'établir le tableau suivant :

Nbre de semaines depuis le début de l'épidémie (x_i)	0	1	2	3	4	5
Nbre de cas de varicelle (y_i)	25	52	82	100	110	97

- Tracer, dans un repère orthogonal, la courbe de f sur l'intervalle $[0; 8]$. Dans ce repère, placer les points de coordonnées $(x_i; y_i)$ correspondant au relevé ci-dessus.
- a. Expliquer en quoi il est pertinent de modéliser le nombre de cas de varicelles au cours du temps par la fonction f . Préciser sur quel intervalle.
- b. En utilisant cette modélisation et avec la précision permise par le graphique, déterminer le nombre d'enfants atteints par la varicelle au bout de 2,5 semaines et la période durant laquelle le nombre de cas de varicelle est supérieur à 100. Arrondir au jour près.
- c. D'après ce modèle, au bout de combien de semaines n'y aura-t-il plus aucun enfant atteint de varicelle dans les crèches de la commune ? Justifier la réponse.

→ Voir **Exercice résolu 8** p. 87

64 STI2D

Une usine produit chaque mois entre 0 et 50 machines agricoles. On a modélisé le bénéfice de cette entreprise, exprimé en milliers d'euros, par la fonction f définie pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 50]$ par : $f(x) = x^3 - 96x^2 + 2\,489,25x - 10\,171,25$. L'entreprise réalise des profits si son bénéfice est strictement positif.



- Montrer que, pour tout x appartenant à $[0; 50]$: $f(x) = (x - 5)(x - 39,5)(x - 51,5)$.
- Étudier le signe de $f(x)$.
- En déduire le nombre de machines agricoles que l'entreprise doit produire pour réaliser des profits.

→ Voir **Exercice résolu 8** p. 87

65



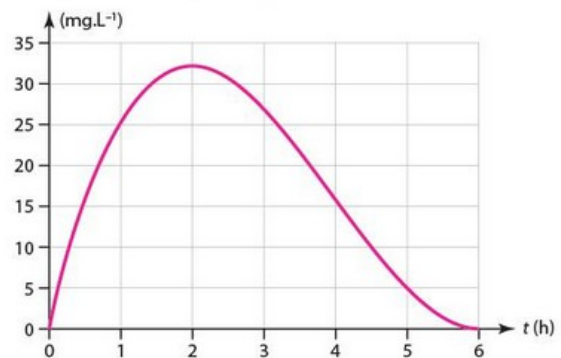
STL

Pour traiter un patient, un médecin procède à l'injection intramusculaire d'une dose d'une substance médicamenteuse au temps $t = 0$ (t est exprimé en heures). Le produit actif se diffuse dans le sang puis est progressivement éliminé. Le médicament est efficace lorsque la concentration du produit actif dans le sang est supérieure ou égale à 25 mg.L^{-1} (25 milligrammes par litre).

La concentration maximale du produit actif dans le sang ne peut pas dépasser 40 mg.L^{-1} pour éviter les effets secondaires.

Partie A : Étude graphique

La courbe donnée ci-dessous représente la concentration en mg.L^{-1} du produit actif dans le sang du malade en fonction du temps écoulé depuis l'injection du médicament.



À l'aide de cette courbe, répondre, avec la précision que permet le graphique, aux questions suivantes.

- Déterminer la concentration en mg.L^{-1} du produit actif pour $t = 5$.
- Le médecin a-t-il respecté la dose à ne pas dépasser ? Expliquer.
- Déterminer les temps en heures et minutes pour lesquels la quantité de produit actif est de 15 mg.L^{-1} .
- Quelle est la durée pendant laquelle le médicament est resté efficace ?
- Au bout de quelle durée le médicament est-il complètement éliminé ?

Partie B : Étude numérique

On admet que la concentration, exprimée en mg.L^{-1} , du produit actif dans le sang du malade est donnée en fonction du temps t , exprimé en heures, par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 6]$ par : $f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$.

On cherche sur quel intervalle de temps la concentration du produit actif dans le sang est supérieure ou égale à 25 mg.L^{-1} . Pour cela, on définit la fonction g sur $[0; 6]$ par $g(t) = f(t) - 25$.

- Reproduire et compléter le tableau suivant :

t	0	1	2	3	4	5	6
$g(t)$							

2. a. À l'aide de la fonction **TABLE** de la calculatrice, déterminer une valeur approchée au dixième près des racines du polynôme $t^3 - 12t^2 + 36t - 25$.

b. Vérifier que $g(t) = (t-1)\left(t - \frac{11-\sqrt{21}}{2}\right)\left(t - \frac{11+\sqrt{21}}{2}\right)$

c. Étudier le signe de la fonction g .

d. En déduire l'intervalle de temps pendant lequel le médicament est efficace.

66 **STMG** Une micro-entreprise fabrique des ventilateurs *vintage*. Le PDG estime que la production pour le mois à venir doit être comprise entre 1 500 et 3 000. On s'intéresse au volume de production qui maximise le profit de l'entreprise. On modélise ce profit,



exprimé en centaines d'euros, par la fonction f définie par : $f(x) = -2x^2 + 90x - 400$, pour $x \in [15; 30]$.

1. Vérifier que 5 et 40 sont des racines du polynôme $-2x^2 + 90x - 400$.

2. En déduire la forme factorisée de la fonction f .

3. Déterminer le signe de la fonction f sur l'intervalle $[15; 30]$.

4. Déterminer la valeur pour laquelle f atteint son extremum.

5. Dresser le tableau de variation de la fonction.

6. Interpréter dans le contexte de l'exercice les résultats obtenus aux questions 3. et 5.

88 Une entreprise possède une chaîne de fabrication capable de fabriquer en une semaine entre 6 000 et 32 000 pièces. Le coût de fabrication, en euros, de x milliers de pièces, pour x compris entre 6 et 32, est noté $C(x)$ où C est la fonction définie sur l'intervalle $[6; 32]$ par $C(x) = 2x^3 - 108x^2 + 5\,060x - 4\,640$.



Toutes les pièces produites sont vendues au prix de 3,5 euros l'unité. Pour tout x appartenant à l'intervalle $[6; 32]$, on note $R(x)$ le montant de la vente en euros de x milliers de pièces. Le bénéfice $B(x)$, en euros, pour la production et la vente de x milliers de pièces est $B(x) = R(x) - C(x)$.

1. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[6; 32]$: $R(x) = 3\,500x$.

2. Représenter les fonctions C et R sur l'écran de la calculatrice.

3. Par lecture du graphique, et avec la précision permise par celui-ci, répondre aux questions suivantes :

a. Quel nombre de pièces produites correspond à un coût de 30 000 euros ?

b. Quel nombre minimal de pièces fabriquées permet d'avoir un bénéfice positif ou nul ?

4. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[6; 32]$: $B(x) = -2x^3 + 108x^2 - 1\,560x + 4\,640$.

5. a. Vérifier que 4 est une racine du polynôme $p(x) = -2x^3 + 108x^2 - 1\,560x + 4\,640$.

b. Déterminer les nombres réels a , b et c tels que, pour tout x réel, $p(x) = (x-4)(ax^2 + bx + c)$.

c. Vérifier que $25 - 3\sqrt{5}$ et $25 + 3\sqrt{5}$ sont les deux autres racines du polynôme.

d. En déduire quelles quantités de pièces produites permettent de réaliser un bénéfice.

6. a. On admet que la fonction B atteint son minimum en 10 et son maximum en 20 sur l'intervalle $[6; 32]$. Dresser le tableau de variation de la fonction.

b. En déduire le bénéfice maximal réalisable par l'entreprise. Donner le nombre de pièces à produire réalisant ce maximum.

Sources

Manuel Magnard Delagrave - Maths 1ère enseignement techno