Logarithme népérien

Compétence 1 : Fonction réciproque

Exercice 1

On considère la fonction $f(x)=1-3x$

1) En partant de $y=f(x)$, exprimer x en fonction de y.
2) En déduire l'expression de $f^{-1}(x)$.
3) Vérifier que $f\circ f^{-1}(x)=x$.

Exercice 2

On considère la fonction $f(x)=3\sqrt{x-1}$.

1) Quel est l'ensemble de définition de f.
2) En partant de $y=f(x)$, exprimer x en fonction de y.
3) En déduire l'expression de $f^{-1}(x)$.
4) Vérifier que $f\circ f^{-1}(x)=x$

Compétence 2 : Propriété du logarithme

Exercice 3

Simplifier :

1. $\ln(1)$
2. $\ln(e^3)$
3. $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$
4. $\ln(\sqrt{e})$
5. $\ln(e^{-2})$

Exercice 4

Simplifier le plus possible :

1. $\ln(3e)$
2. $\ln\left(\frac{5}{e^2}\right)$
3. $\ln(2e^3)$
4. $\ln\left(\frac{e^4}{7}\right)$

Exercice 5

Simplifier :

1. $\ln(9)$
2. $\ln(4e^2)$
3. $\ln\left(\frac{1}{e^5}\right)$
4. $\ln\left((e^2)^3\right)$

Exercice 6

Simplifier :

1. $\ln(2)+\ln(5)$
2. $\ln(8)-\ln(2)$
3. $2\ln(3)$
4. $\ln(7)-\ln(7)$

Exercice 7

Mettre sous la forme $\ln(a)$:

1. $\ln(2)+\ln(3)$
2. $\ln(5)-\ln(2)$
3. $3\ln(2)$
4. $\ln(4)+2\ln(3)$

Exercice 8

Simplifier avec des ln 2 et ln 3

1. $\ln 4$; $\ln 9$; $\ln 12$; $\ln\frac{1}{6}$; $\ln\frac{1}{24}$;
2. $\ln 108$; $\ln(\frac{54}{32})$; $\ln\sqrt{2}$; $\ln\sqrt{12}$

Exercice 9

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\ln(2x-1)$
2. $g(x)=\ln(x^2-4x+3)$
3. $h(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$
4. $k(x)=\ln(\sqrt{2x-5})$

Compétence 3 : Equations, inéquations

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\ln(2x-1)=0$
2. $\ln(x-3)=2$
3. $\ln(x^2)=1$
4. $\ln(x-1)=\ln(5-2x)$

Exercice 11

Résoudre :

1. $\ln(x-2)\leq 1$
2. $\ln(3x+1)>\ln(2x-4)$
3. $\ln(x^2-5x+6)\geq 0$

Exercice 12

1. $3^n>50$
2. $2^{n+1}\leq 64$
3. $100<5^n\leq 625$
4. $4^n-20\geq 12$

Exercice 13

Un café est servi à 90 °C dans une pièce maintenue à 20 °C.
Sa température T(t), en degrés Celsius, au bout de t minutes est modélisée par :

$$T(t)=20+70e^{-0,1t}$$

1. Que se passe-t-il lorsque t tend vers l'infini ?
2. Combien de temps dois-je attendre pour que mon café soit à 40°C ?

Exercice 14

Le paracétamol est un médicament couramment utilisé contre la douleur et la fièvre. Après la prise d'un comprimé, la concentration du médicament dans le sang diminue avec le temps.

On modélise la concentration C(t) (en mg·L^{-1}) du paracétamol dans le sang d'un patient, t heures après la prise, par la fonction : $C(t)=6-\ln(t+1)$ où $t\geq 0$.

1. Quelle est la concentration initiale de paracétamol dans le sang du patient ?
2. Pour pouvoir reprendre une dose de paracétamol, il faut que la concentration soit inférieure à 4 mg·L^{-1}. Combien doit-on attendre ?

Compétence 4 : Etude de fonction

Exercice 15

Déterminer les fonctions dérivées de :

1. $f_1(x)=\ln(1+4x^2)$
2. $f_2(x)=\ln((2x-1)^4)$
3. $f_3(x)=\ln(1+4x^2)$
4. $f_4(x)=\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x-1}\right)$
5. $f_5(x)=\ln(\sqrt{1+x^2})$
6. $f_6(x)=\ln(x(x+7))$
7. $f_7(x)=\ln(1+x)+\ln x$
8. $f_8(x)=\ln((x^2+1)^2(x-1)^3)$

Exercice 16

On considère

$$f(x)=\ln(x)-x+2.$$

1. Déterminer le domaine de définition.
2. Calculer $f'(x)$.
3. Étudier les variations de f.
4. Dresser le tableau de variations.
5. Résoudre $f(x)=0$ graphiquement ou par encadrement.

Compétence 5 : Sujets de bac

Exercice 17 *Centres étrangers 12 juin 2025*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 4\ln(x+1) - \frac{x^2}{25}$$

1. Etudier la fonction f.
2. On considère le script ci-contre écrit en langage Python :

```
from math import *

def f(x) :
    return 4*log(1+x)-(x**2)/25

def bornes(n) :
    p = 1/10**n
    x = 6
    while f(x)-x > 0 :
        x = x + p
    return (x-p, x)
```

On rappelle qu'en langage Python :

- la commande log(x) renvoie la valeur ln x ;
- la commande c∗∗d renvoie la valeur de c^d.

a. Donner les valeurs renvoyées par la commande bornes(2).
On donnera les valeurs arrondies au centième.

b. Interpréter ces valeurs dans le contexte de l'exercice.

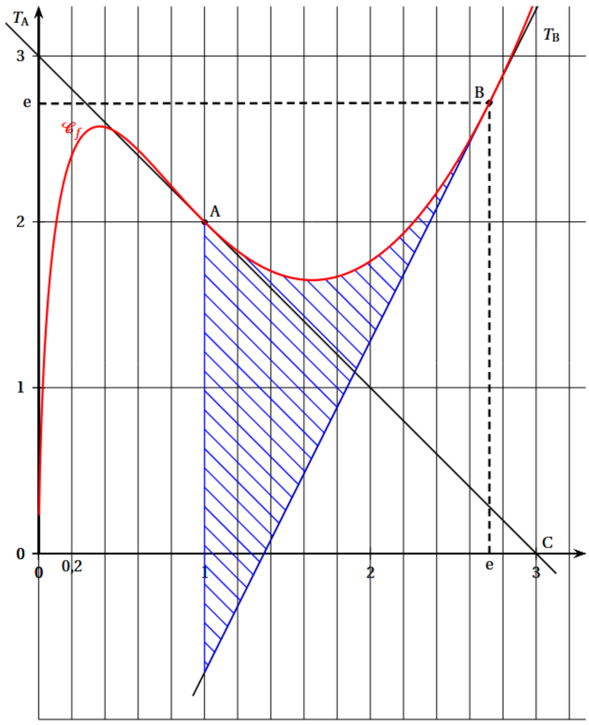
Exercice 18 *Métropole 17 juin 2025*

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. On admet qu'elle est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Dans un repère orthogonal, on a tracé ci-dessous :

- la courbe représentative de f , notée C_f sur l'intervalle $]0\,;\,3]$
- la droite T_A, tangente à C_f au point $A(1\,;\,2)$;
- la droite T_B tangente à C_f au point $B(e\,;\,e)$.

On précise par ailleurs que la tangente T_A passe par le point $C(3\,;\,0)$.



Partie A : Lectures graphiques

On répondra aux questions suivantes en les justifiant à l'aide du graphique.

1. Déterminer le nombre dérivé $f'(1)$.
2. Combien de solutions l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle dans l'intervalle $]0\,;\,3]$?
3. Quel est le signe de $f''(0{,}2)$?

Partie B : étude de la fonction f

On admet dans cette partie que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\left[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2\right]$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$.
   En déduire que $\mathscr{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses.
2. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$.
   On admettra que la limite de f en 0 est égale à 0.

3. On admet que pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$.

a. Montrer que pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, $f''(x) = \dfrac{1}{x}(4\ln x + 1)$.

b. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et préciser la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion.

c. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la tangente T_B sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

Exercice 19

On considère la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1) On a représenté la courbe de la fonction racine carrée.
Déterminer graphiquement les 4 premiers termes de la suite (u_n).

2) Conjecturer le sens de variation de (u_n).

3) (u_n) semble-t-elle converger ?
Si oui, conjecturer sa limite.

4) Démontrer que pour tout entier naturel n :
$1 \leq u_{n+1} \leq u_n$

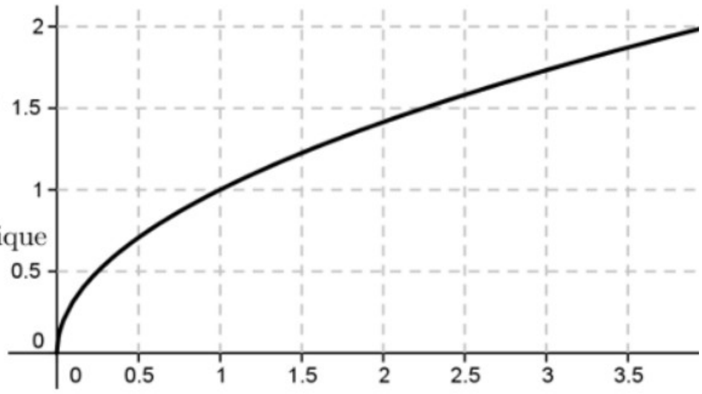
5) Démontrer ce qui a été conjecturé au 3)

6) On pose $v_n = \ln u_n$

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.

b) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

c) Démontrer la conjecture du 3) en utilisant la question 6 b).



Sources

ex 19 : https://jaicompris.com/lycee/math/fonction/logarithme/logarithme-exercice-bac.php