Primitive d'une fonction

Compétence 1 : Primitive

Exercice 1

On considère la fonction $f(x)=1-3x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1) Donner l'écriture générale des primitives de *f*.
2) Déterminer la primitive telle que f(0) = -1

Exercice 2

On considère la fonction $f(x)=6x^2-x^4+2x$ définie sur $\mathbb{R}$.

3) Donner l'écriture générale des primitives de *f*.
4) Déterminer la primitive telle que f(0) = -1

Exercice 3

Déterminer une primitive :

1. $f_1(x) = x^4$
2. $f_2(x) = 3x^2 - 5x + 7$
3. $f_3(x) = \sqrt{x}$
4. $f_4(x) = \dfrac{1}{x}$
5. $f_5(x) = e^x$
6. $f_6(x) = 4e^x$
7. $f_7(x) = \cos x$
8. $f_8(x) = \sin x$
9. $f_9(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
10. $f_{10}(x) = 5x^3 - 2x + 1$

Exercice 4

1. $g_1(x) = \dfrac{1}{x} + 2e^x$
2. $g_2(x) = 3x^2 - \cos x$
3. $g_3(x) = e^x + \sin x$
4. $g_4(x) = \dfrac{2}{x} - 5$
5. $g_5(x) = 4x^3 + \dfrac{1}{1+x^2}$
6. $g_6(x) = \sqrt{x} + e^x$
7. $g_7(x) = \dfrac{5}{x} + 3\cos x$
8. $g_8(x) = x^2 + 2x + e^x$
9. $g_9(x) = \sin x + \dfrac{1}{x}$
10. $g_{10}(x) = 6x^5 - \dfrac{4}{x} + 2$

Exercice 5

1. $h_1(x) = 2x\,e^{x^2}$
2. $h_2(x) = \dfrac{3x}{1+x^2}$
3. $h_3(x) = \cos(2x)$
4. $h_4(x) = (2x+1)(x^2+x)$
5. $h_5(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{1+x^2}}$

Exercice 6

1. $f_1(x) = (2x-3)\,(x^2-3x+7)^5$
2. $f_2(x) = (2x+1)\,e^{x+x^2}$
3. $f_3(x) = \cos\left(\dfrac{x}{3} - 1\right)$
4. $f_4(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
5. $f_5(x) = x\,\sqrt{1+x^2}$

Compétence 2 : Equation différentielle

Exercice 7

Déterminer l'ensemble des solutions y :

a) $y'-5y=0$ b) $y'=\frac{y}{2}$ c) $7y'=5$ d) $8y-1=7$

Exercice 8

Déterminer l'ensemble des solutions y :

a) $2y'+8y=4$ b) $y'+y=8$ c) $3y-y'=0$ d) $1+y+y'=0$

Exercice 9 *Sujet bac sti2d 2017 polynésie*

Une note de musique est émise en pinçant la corde d'une guitare électrique.

La puissance du son émise, initialement de 100 watts, diminue avec le temps t, mesuré en second. On modélise par $f(t)$ la puissance du son émis, exprimée en watt, t secondes après le pincement de la corde.

On considère l'équation différentielle (E) suivante où y est une fonction de la variable t définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ et où y' est la fonction dérivée de y :

$$(E) : 25y' + 3y = 0$$

1. Résoudre l'équation différentielle $25y' + 3y = 0$.
2. Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 100$.
3. Quelle est la puissance du son deux secondes après le pincement de la corde ?

   On arrondira au watt près.

Exercice 10 *Sujet bac sti2d 2017 métropole*

La fonte GS (graphite sphéroïdal) possède des caractéristiques mécaniques élevées et proche de celles des aciers. Une entreprise fabrique des pièces de fonte GS qui sont utilisées dans l'industrie automobile.

Ces pièces sont coulées dans des moules de sable et ont une température de 1 400 °C à la sortie du four. Elles sont entreposées dans un Local dont la température ambiante est maintenue à une température de 30 °C . Ces pièces peuvent être démoulées dès lors que leur température est inférieure à 650 °C .

La température en degrés Celsius d'une pièce de fonte est une fonction du temps t, exprimé en heures, depuis sa sortie du four. On admet que cette fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$, est une solution sur cet intervalle de l'équation différentielle :

$$y' + 0{,}065y = 1{,}95.$$

1. **a.** Résoudre sur $[0;+\infty[$ l'équation différentielle $y' + 0{,}065y = 1{,}95$.

b. Donner $f(0)$ et vérifier que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par

$$f(t) = 1370\,\mathrm{e}^{-0{,}065t} + 30.$$

2. **a.** Étudier mathématiquement le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

b. Pourquoi ce résultat était-il prévisible ?

3. La pièce de fonte peut-elle être démoulée après avoir été entreposée 5 heures dans le local ?

4. **a.** Déterminer au bout de combien de temps au minimum la pièce pourra être démoulée. Arrondir le résultat à la minute près.

b. Pour éviter la fragilisation de la fonte, il est préférable de ne pas démouler la pièce avant que sa température ait atteint 325 °C.
Dans ce cas faudra-t-il attendre exactement deux fois plus de temps que pour un démoulage à 650 °C ? Justifier la réponse.

Exercice 11 *Baccalauréat STL biotechnologies Polynésie 13 juin 2016*

Pierre possède une piscine naturelle de 80 000 litres d'eau. Des plantes épuratives jouent le rôle de filtration naturelle. Afin d'améliorer l'oxygénation de l'eau, Pierre décide de recycler en permanence une partie de l'eau de la piscine en la remplaçant par l'eau d'un puits voisin. Malheureusement, Pierre ne sait pas que l'eau du puits, captée par une pompe, est contaminée par des germes.

Avant la mise en route de la pompe, l'eau de la piscine n'est contaminée par aucun germe. La quantité d'eau contaminée au cours du temps est modélisée par une fonction f. Lorsque t représente le temps écoulé, en heures, depuis la mise en route de la pompe, $f(t)$ représente la quantité, en litres, d'eau contaminée venant du puits au bout de t heures de pompage.

On admet que la fonction f, définie sur $[0\,;\,+\infty[$, est solution de l'équation différentielle :

$$y' + 0{,}00625\,y = 30.$$

1. **a.** Donner les solutions de cette équation différentielle sur $[0\,;\,+\infty[$.

   b. Sachant que $f(0) = 0$, déterminer une expression de $f(t)$ pour tout réel t de $[0\,;\,+\infty[$.

   Dans les questions suivantes, on admet que pour tout réel t de $[0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f(t) = 4\,800 - 4\,800\mathrm{e}^{-0{,}00625t}.$$

2. Calculer, en litres, la quantité d'eau contaminée venant du puits au bout de 72 heures. Le résultat sera arrondi à l'unité.

3. **a.** Calculer $f'(t)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f. En déduire le tableau de variations de la fonction f (on admet que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 4\,800$).

   b. Ce sens de variation de la fonction f déterminé est-il cohérent avec la situation concrète étudiée.

   Pourquoi ?

4. La piscine devient dangereuse pour la peau lorsque la quantité d'eau contaminée dépasse 6 % du volume d'eau de la piscine.

   Cette piscine peut-elle être dangereuse pour la peau ? Justifier.

5. La piscine devient impropre à la baignade lorsque la quantité d'eau contaminée dépasse 3 % du volume d'eau de la piscine.

   Déterminer, à l'heure près, au bout de combien de temps l'eau de la piscine deviendra impropre à la baignade.

Exercice 12

Commencez par résoudre l'équation homogène, puis cherchez une solution particulière.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$;
2. $7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$;
3. $y' + y = xe^{-x}$;
4. $y' - 2y = \cos(x) + 2\sin(x)$;

Sources

ex 15 : https://www.bibmath.net/ressources/index.php?action=affiche&quoi=bde/analyse/equadiff/eqlineairespremordre&type=fexo