Fonction exponentielle

Compétence 1 : Calculs et simplification

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes où x est un réel quelconque:

$$a) \frac{e^{1+x}}{e^{x+2}} \quad b) \frac{e^{3x} + e^x}{e^{2x} + e^x} \quad c) \left(\frac{e}{e^{-x}} \right)^4$$

Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes :

$$1. A = (e^x)^3 e^{-2x}$$

$$2. B = \frac{e^{2x+1}}{e^{-2x}}$$

$$3. C = \frac{e^{3x-1}}{e^{2-x}}$$

$$4. D = \sqrt{\frac{20e^{5x}}{5e^{-4x}}}$$

$$5. E = \sqrt{\frac{3e^{x-1}}{e^{2x+1}}}$$

Exercice 3

Simplifier :

$$A = \frac{(e^{2x}-1)^3}{e^{-3}}$$

$$B = e^{2x}(e^x - (e^{-2x})^4 e^{3x})$$

$$C = \frac{e^{3x} + e^x}{e^{2x}}$$

Exercice 4

Simplifier :

$$A = \frac{e^{2x-3}}{e^{x-3}}$$

$$B = \left(\frac{e^{-2x}}{e^x} \right)^3$$

$$C = \frac{e \times (e^{0.5x})^3}{e^{4x} \times e^{-5x}}$$

Exercice 5

Montrer que pour tout réel x :

$$\frac{(e^x-1)(e^x+1)}{e^{2x}} = 1 - e^{-2x}$$

Exercice 6

Montrer que pour tout réel x :

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^x} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{2x}}$$

Compétence 2 : Equations

Exercice 7

Résoudre l'équation suivante $e^{x^2+x-42} = 1$

Exercice 8

Résoudre l'équation suivante $\frac{2}{e^x+1} = e^{-x}$

Exercice 9

Résoudre l'équation suivante $e^{3+5x} = e^{7-x^2}$

Exercice 10

Résoudre l'équation suivante $e^{2x} - (e+1)e^x + e = 0$

Indication : On posera $X = e^x$

Exercice 11

Résoudre l'inéquation suivante $e^{3x+5x^2} > e^{7-x^2}$

Compétence 3 : Dérivation

Exercice 12

Déterminer la dérivée de la fonction $f(x) = e^{3x-5}$.

Exercice 13

Déterminer la dérivée de la fonction $g(t) = 7e^{10-8t}$.

Exercice 14

Déterminer la dérivée de la fonction $h(x) = 7e^{x^2-5x+4}$.

Exercice 15

Déterminer la dérivée de la fonction $f(x) = 7e^{x^2-5x+4}$.

Compétence 4 : Problème

Exercice 16 Physique

Les molécules d'un gaz enfermé dans un récipient à la température T sont animées d'une vitesse positive de v centimètres par seconde.

Cet état d'équilibre est caractérisé par la fonction de distribution de vitesse de Maxwell-Boltzmann F définie par la formule :

$$F(v) = c v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

où c et k sont des constantes positives, T est la température en °K (degrés Kelvin), m la masse d'une molécule.

Quelle est la valeur maximale de F ?

Exercice 17 Cours

On considère la fonction $g(x) = e^x - x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

- 1) Etudier les variations de g .
- 2) En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.
- 3) En déduire que, pour tout réel x , $e^x > x$.

Exercice 18 Médecine

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = 3xe^{-0,4x}$.

La fonction dérivée de la fonction f est notée f' .

1. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
2. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
3. Un sportif a pris un produit dopant. La fonction f modélise la quantité, en mg/L, de ce produit dopant présent dans le sang du sportif x heures après la prise.
 - a. Pourquoi peut-on affirmer que ce produit dopant n'est pas naturellement présent dans l'organisme du sportif ?
 - b. Combien de temps après son absorption, ce produit dopant sera-t-il présent en quantité maximale dans le sang du sportif ?
 - c. Le sportif absorbe ce produit dopant au début d'une séance d'entraînement. Le même jour, 6 heures après le début de cette séance d'entraînement, il est soumis à un contrôle anti-dopage. Celui-ci se révélera positif si la quantité de produit dopant présent dans l'organisme de ce sportif dépasse 1,4 mg/L.
Ce contrôle anti-dopage sera-t-il positif ? Justifier.

Exercice 19 Economie

Partie A – Étude d'une fonction

La fonction f est définie sur $[0; 30]$ par :

$$f(x) = (x^2 - 11)e^{-0,2x}$$

Partie B – Application économique

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-2} si nécessaire.

La fonction de demande d'un produit est modélisée sur l'intervalle $[5; 30]$ par la fonction f étudiée dans la **partie A**.

Le nombre $f(x)$ représente la quantité demandée, exprimée en centaines de milliers d'objets, lorsque le prix unitaire est égal à x euros.

1. Calculer le nombre d'objets demandés, au millier près, lorsque le prix unitaire est fixé à 15 euros.
2. L'élasticité $E(x)$ de la demande par rapport au prix est le pourcentage de variation de la demande pour une augmentation de 1% du prix.

On admet qu'une bonne approximation de $E(x)$ est donnée par :

$$E(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \times x \text{ lorsque } x \in [5; 30].$$

Calculer $E(15)$ et interpréter le résultat.