

Variable aléatoire

Compétence 1 : Définition

Exercice 1

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,1	0,3	0,15	0,4	0,05

- Déterminer : **a.** $P(X = 1)$ **b.** $P(X \leq 4)$ **c.** $P(X < 4)$ **d.** $P(X > 2)$
- Déterminer l'espérance $E(X)$

Exercice 2

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,4	0,05	...	0,2	0,1

- Déterminer la probabilité de l'événement $(X \geq 3)$.
- Quelle est la valeur manquante ?

Exercice 3

G est la variable aléatoire qui donne le gain en euro d'un joueur à un jeu. La loi de probabilité de G est donnée par le tableau suivant :

x_i	-10	0	5	10	20
$P(G = x_i)$	0,4	0,1	0,2	0,1	0,2

- Déterminer $E(G)$
- Modifier la valeur -10 du tableau pour rendre le jeu équitable.
- Proposer une autre méthode simple pour rendre le jeu équitable en modifiant tous les gains, sans que les gains soient tous nuls.

Compétence 2 : Problèmes

Exercice 4

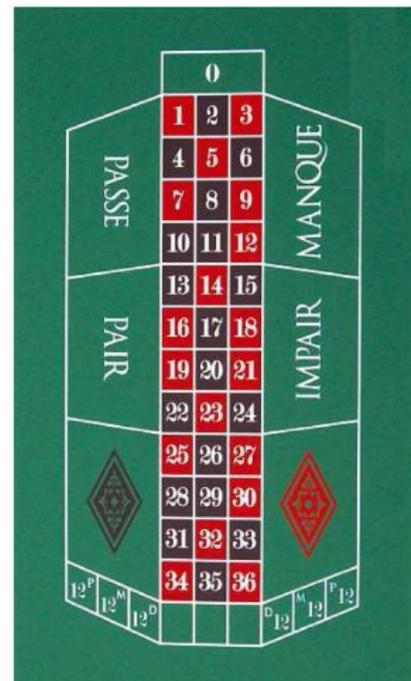
Exercice 5 :

Au jeu de la roulette, les 37 issues 0, 1, 2, ..., 36 sont équiprobables.

On se propose de comparer trois stratégies de jeu.

- Stratégie 1** : un joueur mise 10 € sur "rouge".
Si un numéro rouge sort, il reçoit le double de sa mise ;
sinon, perd sa mise.
- Stratégie 2** : il mise 10 € sur un numéro.
S'il sort, il reçoit 36 fois sa mise ;
sinon, il perd sa mise.
- Stratégie 3** : il mise 10 € sur l'événement P_{12} (première douzaine) qui correspond à la sortie de l'un des numéros 1, 2, ..., 12.
Si cet événement est réalisé, il reçoit le triple de sa mise ;
sinon, il perd sa mise.

- Pour chacune des stratégies :
 - Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire qui indique le gain algébrique du joueur.
 - Calculer l'espérance mathématique et la variance.
- Comparer les espérances et les variances.
Quelle interprétation faites-vous concernant le gain moyen et la possibilité de "gagner une grosse somme" ?



Exercice 5

Le coût de production d'un objet est de 950 €. Cet objet peut présenter un défaut A, un défaut B, ou bien en même temps le défaut A et le défaut B. La garantie permet de faire des réparations aux frais du fabricant avec les coûts suivants : 100 euros pour le défaut A et 150 euros pour le défaut B. On admet que 90% des objets produits n'ont aucun défaut, 5% ont au moins le défaut A, et 4% ont les deux défauts A et B.

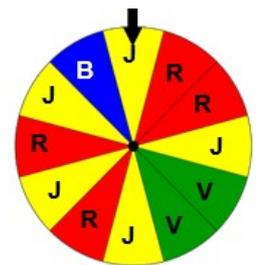
1. A l'aide d'un tableau, déterminer la proportion des objets ayant au moins le défaut B.
2. On note X la variable aléatoire qui, à chaque objet choisi au hasard, associe son prix de revient réel. Déterminer la loi de probabilité de X .
3. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de cette variable aléatoire. Interpréter le résultat.
4. On admet que tous les objets produits sont vendus.
 - (a) L'usine peut-elle espérer réaliser des bénéfices en vendant 960 € chaque objet vendu ?
 - (b) L'usine veut réaliser un bénéfice moyen de 100 € par objet. Expliquer comment doit-on alors choisir le prix de vente de l'objet produit.

Exercice 6

Considérons le jeu suivant :

Il faut payer 5€ pour tourner la roue.

On gagne 20€ si le bleu sort, 10€ si le vert sort, 3€ si jaune sort et rien du tout si le rouge sort.



Ce jeu est-il intéressant pour un casino ?

Exercice 7

Lors des journées classées « rouges » selon Bison Futé, l'autoroute qui relie Paris à Marseille est surchargée. Bison Futé a publié les résultats d'une étude portant sur les habitudes des automobilistes sur le trajet Paris Marseille lors de ces journées « rouges ». Il s'avère que :

- 40% des automobilistes prennent l'itinéraire de délestage entre Beaune et Valence,
- Parmi les automobilistes ayant suivi l'itinéraire de délestage entre Beaune et Valence, 30% prennent la route départementale de Valence à Marseille,
- Parmi les automobilistes n'ayant pas suivi l'itinéraire de délestage entre Beaune et Valence, 60% prennent la route départementale entre Valence et Marseille.

On donne les temps de parcours estimés lors de ces journées classées « rouge ».

- Paris/Beaune par autoroute : 4 heures,
- Beaune/Valence par autoroute : 5 heures,
- Beaune/Valence par itinéraire de délestage : 4 heures,
- Valence/Marseille par autoroute : 5 heures,
- Valence/Marseille par la route départementale : 3 heures.

- 1) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire égale à la durée du trajet pour se rendre de Paris à Marseille.
- 2) Calculer l'espérance de cette variable aléatoire et en donner une interprétation.

Exercice 8

Paradoxe de St Petersburg

Considérons le jeu suivant : on joue à pile ou face. Si face apparaît, la banque paie 2 euros au joueur, et on arrête le jeu. Sinon, on relance la pièce. Si face apparaît, la banque paie 4 euros, et on arrête le jeu. Sinon, on relance la pièce. Si face apparaît, la banque paie 8 euros au joueur, et ainsi de suite. Donc, si face apparaît pour la première fois au n -ième lancer, la banque paie 2^n euros au joueur.

Etes-vous prêt à payer 10€ pour jouer à ce jeu ? Et 10 000€ ?

Exercice 9

Pour traverser le couloir du troisième étage du lycée, Miguel met cinq minutes.

Il sait que si, lors de cette traversée, il rencontre un ami, il parlera avec lui deux minutes.

Il y a deux salles devant lesquelles il peut retrouver un ami et la probabilité qu'il en rencontre un devant une salle est 0,3. Ces rencontres sont indépendantes.

X est la variable aléatoire donnant le temps de traversée du couloir en minute.

Déterminer la loi de probabilité de X .

Exercice 10

Y est une variable aléatoire pouvant prendre les valeurs $-4 ; 5 ; 10$ et 100 , et telle que $E(Y) = 8$.

1. Soit la variable aléatoire Z telle que $Z = 2Y + 50$.

a) Quelles valeurs peut prendre Z ?

b) Déterminer $E(Z)$.

2. Soit la variable aléatoire R telle que $R = -3Y + 5$.

a) Quelles valeurs peut prendre R ?

b) Déterminer $E(R)$.

Exercice 11

Démontrer la formule de König-Huygens : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

Sources

Exercice 1 : <https://jaicompris.com/lycee/math/probabilite/variable-aleatoire/variable-aleatoire.php>

Exercice 11 : https://manuel.sesamath.net/numerique/index.php?ouvrage=ms1spe_2019&page_gauche=310