

Intégrales

Compétence 1 : Fonctions basiques

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^5 (3x^2 + 5x - 2) dx$$

$$J = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{x} + 2e^x \right) dx$$

$$K = \int_0^{\pi} (x + \cos x) dx$$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_{0,5}^4 e^{1-2x} dx$$

$$J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3 dx$$

$$K = \int_0^{10} (3t - 2) dt$$

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 x e^{1+x^2} dx$$

$$J = \int_0^{\pi} \sin(3x + 5) dx$$

$$K = \int_{-1}^1 (2t + 1)(1 + t + t^2) dt$$

Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_2^3 \frac{7+4x}{7x+2x^2} dx$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t e^{\sin t} dt$$

$$K = \int_0^2 \frac{1}{(2-5x)^2} dt$$

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$

1. Montrer que $f(x) = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$

2. En déduire la valeur de l'intégrale de f sur l'intervalle $[0; \ln(5)]$

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$

Compétence 2 : Par parties

Exercice 7

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_1^e \ln x dx$$

$$J = \int_0^1 t e^t dt$$

$$K = \int_1^e t \ln(t) dt$$

Exercice 8

Calculer les intégrales suivantes :

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$$

$$J = \int_0^1 t^2 e^t dt$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin t \cos t dt$$

Exercice 9

Soit un entier naturel n . Calcule l'intégrale suivante : $I_n = \int_1^e t^n \ln t dt$

Exercice 10

Soit un entier naturel n .

1. Calculer l'intégrale suivante en fonction de n : $I_n = \int_0^n t^2 e^{-t} dt$

2. En déduire la limite de I_n .

Exercice 11

Pour tout entier naturel n , on définit l'intégrale : $I_n = \int_1^e x^n e^{1-x} dx$.

1. Calculer la valeur exacte de I_0 .

2. A l'aide d'une intégration par partie, démontrer que $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$.

3. En déduire les valeurs de I_1 et I_2 .

Exercice 12

En effectuant deux intégrations par parties successives, déterminer la valeur de :

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$$

Compétence 4 : Surfaces

Exercice 13

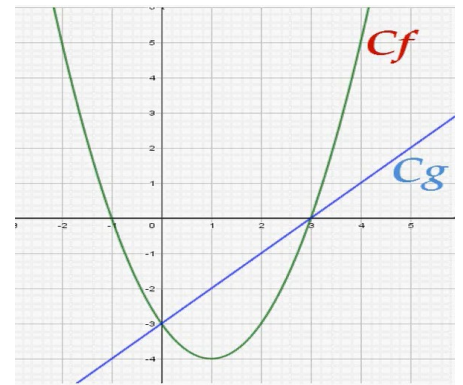
Soient les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 \text{ et } g(x) = x - 3$$

On note C_f et C_g leurs courbes dans un repère orthonormé (où l'unité est le m)

1. Déterminer l'aire A_1 délimitée par C_f , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$.

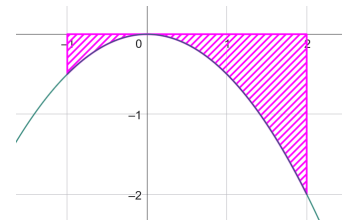
2. Déterminer l'aire A_2 située entre les courbes C_f et C_g .



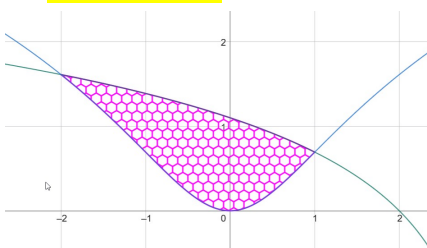
Exercice 14

On considère la fonction $f(x) = -0,5x^2$ et sa courbe représentative C_f dans un repère orthonormé.

Déterminer la valeur de l'aire hachurée ci-contre. (en u.a.)



Exercice 15



Un graphiste veut représenter un oeil comme le domaine entre les courbes de deux fonctions :

$$f(x) = \ln(3-x) \text{ et } f(x) = \ln(1+x^2)$$

1) Identifier les courbes sur le dessin.

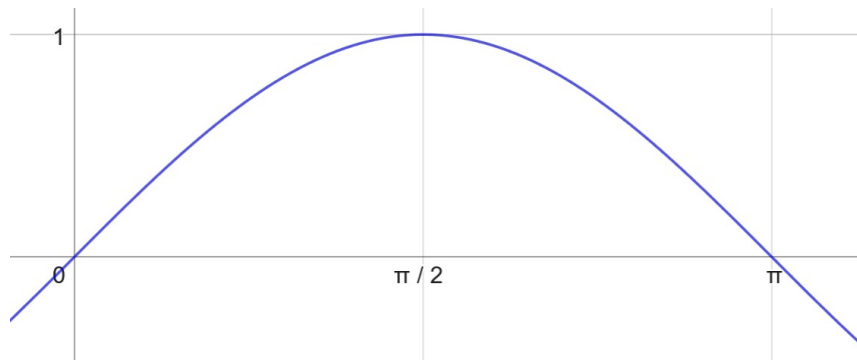
2) Déterminer les coordonnées des points d'intersections.

3) Calculer la surface de cet oeil (l'unité choisie est le cm).

Compétence 5 : Valeur moyenne

Exercice 16

Quelle est la valeur moyenne du sinus sur l'intervalle $[0, \pi]$?



Exercice 17

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 18x e^{3x^2+1}$.

Déterminer la valeur moyenne de cette fonction sur l'intervalle $[2,5]$

Exercice 18

On peut modéliser le chiffre d'affaire, en milliers d'euros, d'une entreprise par la fonction $f(x) = 0,01x^2 + 5$ où x est le nombre de mois.

- 1) Quel est le chiffre d'affaire moyen sur les 5 premiers mois ?
- 2) Combien de mois seront nécessaires pour que le chiffre d'affaire moyen, depuis le début, dépasse 10 000€ ?

Exercice 19

La hauteur, en mn d'une ligne électrique peut être modélisée par la fonction

$$f(x) = e^{\frac{x}{10}} + e^{-\frac{x}{10}} \text{ avec } x \in [-10, 10]$$



Quelle est la hauteur moyenne de cette ligne électrique ?

Compétence 6 : Type bac

Exercice 20 Brevet de technicien supérieur 2005 groupe D

On décide de mesurer en fonction du temps la quantité de principe actif d'un médicament présent dans le sang d'un groupe de patients en traitement dans un hôpital. À l'instant t , exprimé en minutes, on note $q(t)$ la quantité exprimée en milligrammes de ce principe actif, contenue dans le sang d'un patient.

On admet dans cette partie que, pour tout t de $[0; 1440]$,

$$q(t) = 3 - 0,002t - 3e^{-\frac{t}{4}}.$$

On rappelle que le temps t est exprimé en minutes.

1. a. Calculer $q'(t)$ pour tout t de $[0; 1440]$.
b. Résoudre dans $[0; 1440]$ l'inéquation $q'(t) \geq 0$.
c. En déduire le sens de variation de q sur $[0; 1440]$.
La fonction q admet un maximum pour $t = t_0$. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de t_0 et $q(t_0)$.
2. Calculer la quantité de principe actif restant dans le sang d'un patient 24 heures après l'injection du médicament. On arrondira le résultat à 10^{-2} près.

3. Démontrer que la valeur moyenne V_m de la fonction q sur $[0; 1440]$ est :

$$V_m = \frac{1}{1440} (2234,4 + 12e^{-360}).$$

Exercice 21 *Baccalauréat Asie 12 juin 2025*

Dans un laboratoire, on étudie une réaction chimique dans un réacteur fermé, sous certaines conditions. Le traitement numérique des données expérimentales a permis de modéliser l'évolution de la température de cette réaction chimique en fonction du temps.

L'objectif de cet exercice est d'étudier cette modélisation.

La température est exprimée en degré Celsius et le temps est exprimé en minute.

Dans tout l'exercice, on se place sur l'intervalle de temps $[0; 10]$.

On admet que la fonction f est définie pour tout réel t de l'intervalle $[0; 10]$ par

$$f(t) = (60t + 40)e^{-0,5t}$$

1. Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0; 10]$, on a : $f'(t) = (40 - 30t)e^{-0,5t}$.

2. a. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 10]$.

Dresser le tableau de variations de la fonction f en y faisant figurer les images des valeurs présentes dans le tableau.

b. Montrer que l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution α strictement positive sur l'intervalle $]0; 10]$.

c. Donner une valeur approchée de α au dixième près et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

3. On définit la température moyenne, exprimée en degré Celsius, de cette réaction chimique entre deux temps t_1 et t_2 , exprimés en minute, par

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_0^4 f(t) dt = 320 - \frac{800}{e^2}$$

b. En déduire une valeur approchée, au degré Celsius près, de la température moyenne de cette réaction chimique au cours des 4 premières minutes.

Exercice 22 *Baccalauréat Métropole septembre 2025*

On s'intéresse à la glycémie chez une personne venant de prendre un repas.

La glycémie en $g \cdot L^{-1}$, en fonction du temps t , exprimé en heure, écoulé depuis la fin du repas, est modélisée par la fonction f définie sur $[0; 6]$ par :

$$f(t) = (t + 1)e^{-0,4t}$$

On souhaite déterminer la glycémie moyenne en $g \cdot L^{-1}$ chez cette personne lors des six heures qui suivent le repas.

a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^6 f(t) dt = -23,75 e^{-2,4} + 8,75.$$

b. Calculer la glycémie moyenne en $g \cdot L^{-1}$ chez cette personne lors des six heures qui suivent le repas.

c. En remarquant que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E), expliquer comment on aurait pu obtenir ce résultat autrement.

Exercice 23 *Baccalauréat Métropole 19 juin 2024*

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x - \ln(x^2 + 1),$$

1. Étudier le signe de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$.

2. Interpréter graphiquement l'intégrale :

$$I = \int_2^4 f(x) dx.$$

3. On admet dans cette question que, pour tout nombre réel $x \in [2 ; 4]$, on a l'encadrement :

$$0,5x - 1 \leq f(x) \leq 0,25x + 0,25.$$

En déduire l'encadrement :

$$1 \leq I \leq 2.$$

Exercice 24 *Baccalauréat Métropole Antilles-Guyane septembre 2024*

Un artisan crée des bonbons au chocolat dont la forme rappelle le profil de la montagne locale représentée en **Figure 1**. La base d'un tel bonbon est modélisée par la surface grisée, définie ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 1 cm (**Figure 2**).

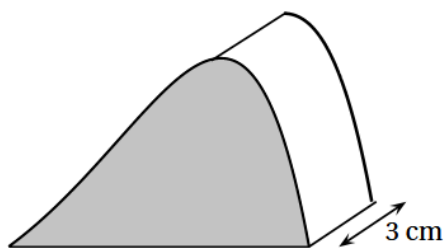


Figure 1

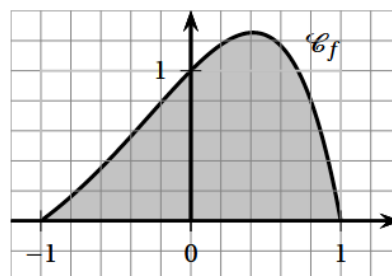


Figure 2

Cette surface est délimitée par l'axe des abscisses et la représentation graphique notée \mathcal{C}_f de la fonction f définie sur $[-1 ; 1]$ par :

$$f(x) = (1 - x^2) e^x.$$

L'objectif de cette partie est de calculer le volume de chocolat nécessaire à la fabrication d'un bonbon au chocolat.

1. a. Justifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1 ; 1]$ on a $f(x) \geq 0$.

b. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_{-1}^1 x e^x dx.$$

2. Le volume \mathcal{V} de chocolat, en cm^3 , nécessaire à la fabrication d'un bonbon est donné par :

$$\mathcal{V} = 3 \times S$$

où S est l'aire, en cm^2 , de la surface colorée (**Figure 2**).

En déduire que ce volume \mathcal{V} , arrondi à $0,1 \text{ cm}^3$ près, est égal à $4,4 \text{ cm}^3$.

Compétence 7 : Pour aller plus loin

Exercice 25 Intégrale de Wallis

Pour tout entier n , on définit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$

1) Calculer I_0 et I_1 .

2) Pour $n \geq 2$, montrer que $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

3) Démontrer que la suite $(n I_n I_{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et déterminer la valeur de cette constante.

4) Montrer que pour tout $p \geq 0$:

$$\begin{cases} W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\ W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \end{cases}.$$

Exercice 26

On se propose de déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de l'intégrale $L = \int_0^1 f(x) dx$ où f est la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{2-x}$$

1. Démontrer que pour tout $x \in [0 ; 1]$:

$$\frac{1}{e} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$$

2. Soient J et K les intégrales définies par :

$$J = \int_0^1 (2+x) e^{-x} dx \quad ; \quad K = \int_0^1 x^2 f(x) dx$$

(a) Calculer J et montrer que $J = 3 - 4e^{-1}$.

(b) Utiliser l'encadrement de la question 1. pour démontrer que :

$$\frac{1}{3e} \leq K \leq \frac{1}{6}$$

(c) Démontrer que $J + K = 4L$.

(d) En déduire un encadrement de L , puis donner une valeur approchée de L à 10^{-1} près.

Source

ex 13 : <https://www.youtube.com/watch?v=T56Okt3gaH4>

ex 26 : https://cours-de-sciences.fr/enseignement/terminale_generale/mathematiques_specialites/calcul_integral/calcul_integral_exercices.pdf