Lois des grands nombres

Compétence 1 : Bienaymé-Tchebychev

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire d'espérance $\mathbb{E}(X) = 10$ et de variance $\mathrm{Var}(X) = 4$.

1. Donner un majorant de

$$P(|X - 10| \geq 3)$$

2. En déduire un minorant de

$$P(7 < X < 13)$$

Exercice 2

On lance 1000 fois une pièce équilibrée.
1) En utilisant l'inégalité de B-T, minorer la probabilité d'obtenir entre 480 et 520 piles.
2) On sait que le tirage des 1000 pièces suit une loi binomiale (répétition indépendante d'une expérience de Bernoulli). Refaites les calcul à l'aide de la loi binomiale (à la calculatrice).
3) Que dire de l'inégalité de B-T ?

Exercice 3

Soit X telle que E(X)=20 et Var(X)=16.
Montrer que $P(16 \leq X \leq 24) \geq 0{,}75$

Exercice 4

Une machine produit des pièces dont la longueur (en mm) est modélisée par une variable aléatoire X telle que :

- E(X)=100
- Var(X)=1

1. Donner un majorant de la probabilité qu'une pièce ait une longueur qui diffère de plus de 2 mm de la moyenne.
2. En déduire un intervalle dans lequel se trouvent au moins 75 % des pièces.

Exercice 5

On lance 3600 fois un dé équilibré à six faces. On souhaite minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du chiffre 1 soit compris entre 480 et 720.

1. Soit S la variable aléatoire comptant le nombre d'apparitions du chiffre 1 au cours des 3600 lancers. Déterminer la loi de S.
2. Prouver que $E(S) = 600$ et $V(S) = 500$.
3. Justifier l'équivalence :
$$480 < S < 720 \iff |S - 600| < 120.$$
4. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, prouver que
$$P(480 < S < 720) \geq 0,96.$$

Compétence 2 : Inégalité de concentration

Exercice 6

On lance une pièce équilibrée n=100n = 100n=100 fois.

1. Calculer un majorant de :

$$P(|F_n - 0{,}5| \geq 0{,}1)$$

2. En déduire un minorant de :

$$P(0{,}4 \leq F_n \leq 0{,}6)$$

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre *p*.
Soit une variable aléatoire moyenne □ □d'un échantillon de taille □□de la variable aléatoire □□

1. Démontrer que $P(|M_n - p| \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}) \leqslant p(1-p)$.

2. Démontrer que $\forall\, p \in]0\,;1[\,,\, p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$.

3. En déduire que $P(|M_n - p| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}) \geqslant 75\,\%$.

4. Faites le lien avec le résultat de seconde.

Exercice 8

Une pièce a une probabilité $p = 0{,}3$ de tomber sur pile.
On effectue $n = 200$ lancers.

1. Calculer un majorant de :

$$P(|F_n - 0{,}3| \geq 0{,}1)$$

2. En déduire un intervalle dans lequel se trouve F_n avec forte probabilité.

Exercice 9

On lance une pièce équilibrée.

On veut :

$$P(|F_n - 0{,}5| < 0{,}05) \geq 0{,}9$$

1. Trouver une condition sur n
2. Donner une valeur minimale de n

Exercice 10 Baccalauréat Polynésie 17 juin 2025

On s'intéresse à un échantillon de 20 enfants atteints d'allergie alimentaire choisis au hasard.

L'âge d'apparition des premiers symptômes allergiques de ces 20 enfants est modélisé par les variables aléatoires $A_1, A_2, \ldots, A_{20}$. On admet que ces variables aléatoires sont indépendantes et suivent la même loi d'espérance 4 et de variance 2,25.
On considère la variable aléatoire :

$$M_{20} = \frac{A_1 + A_2 + \ldots + A_{20}}{20}.$$

1. Que représente la variable aléatoire M_{20} dans le contexte de l'exercice?

2. Déterminer l'espérance et la variance de M_{20}.

3. Justifier, à l'aide de l'inégalité de concentration, que

$$P(2 < M_{20} < 6) > 0{,}97.$$

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 11

Un logiciel a un bug avec probabilité p=0,1. On teste n=100 utilisations.

1. Donner une borne de la probabilité que la fréquence de bugs soit supérieure à 0,2.

2. Est-ce un événement probable ?

Source

ex 5 : https://www.uphf.fr/sites/default/files/media/2022-03/exercices.pdf