Récurrence

Exercice 1

Soit la suite $\begin{cases} v_0=2 \\ v_{n+1}=3v_n-2 \end{cases}$. Démontrer que $v_n=3^n+1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Exercice 2

Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Exercice 3

Soit la suite $\begin{cases} u_0=10 \\ u_{n+1}=u_n\div 2+2 \end{cases}$. Démontrer que $3\leq u_n\leq 7$ pour tout entier $n\geq 1$

Exercice 4

our tout entier naturel $n\geq 1$, on définit *n!* (qui se lit factorielle *n* ou *n* factorielle) par :

$$n!=1\times 2\times 3\times\ldots\times n$$

1) Montrer que $n!\leq n^n$ pour tout entier $n\geq 1$

2) Montrer que $2^n\leq n!$ pour tout entier $n\geq 2$

Exercice 5

1) Conjecturer une formule pour la somme des premiers nombres impairs :

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)$$

2) Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 6

Soit la suite $\begin{cases} u_0=2 \\ u_n=4u_{n-1}-3n+4 \end{cases}$. Montrer par récurrence que $u_n\geq n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Exercice 7

Démontrer le résultat suivant : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 8

Démontrer le résultat suivant : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Exercice 9

Etudier les variations de la suite $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\sqrt{2u_n} \end{cases}$

Exercice 10

Etudier les variations de la suite $u_n=\dfrac{3}{n}-1$ définie pour tout entier *n*>0.

Exercice 11

Montrez par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Exercice 12

Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier impair λ_n tel que

$$5^{2^n} = 1 + \lambda_n 2^{n+2}.$$

Exercice 13

Au début de l'année 2021, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 40 \\ u_{n+1} & = & 0{,}008u_n(200 - u_n) \end{cases}$$

où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $(2021 + n)$.

1. Donner une estimation, selon ce modèle, du nombre d'oiseaux dans la colonie au début de l'année 2022.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;100]$ par $f(x) = 0{,}008x(200 - x)$.

2. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;100]$ l'équation $f(x) = x$.

3. **a.** Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;100]$ et dresser son tableau de variations.

b. En remarquant que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100.$$

Exercice 14

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$.

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2{,}5 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 10$.

Sources

Exercice 11 et 12 : Polycopié Louis Le Grand

Exercice 13 : sujet bac polynésie 2022

Exercice 14 : Sesamath https://manuel.sesamath.net/numerique/diapo.php?atome=92077&ordre=1