

Compléments sur la dérivation

Rappels

Exercice 1

Dériver les fonctions suivantes :

a) $f_1(x) = 10x^3 - 6x^2 + 0.4x - 15$

d) $f_4(x) = (x^2 + 3x - 2)e^{x-1}$

b) $f_2(x) = 50x^8 - \frac{3}{x^2}$

e) $f_5(x) = \frac{e^{2x}}{x} + 1$

c) $f_3(x) = 5x^3 + e^{4x+1}$

f) $f_6(x) = xe^{x^2-3x}$

Exercice 2

Etudier les variations de la fonction $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$

Exercice 3

En étudiant une fonction que vous définirez, montrez que: $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x$.

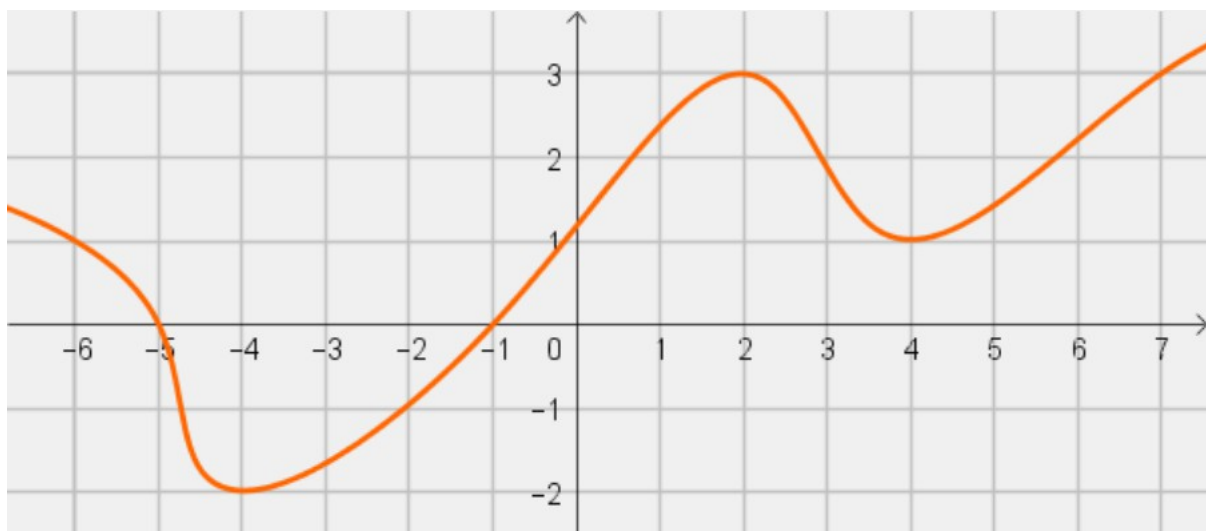
Exercice 4

On considère la fonction $f(x) = 3x^4 + 16x^3 - 66x^2 - 360x + 120$ définie sur \mathbb{R} .

- 1) Déterminez l'expression de f'' puis dressez son tableau de signes.
- 2) En déduire les variations de f' .
- 3) Montrez que $f'(x) = a(x+5)(x-3)(x+2)$
- 4) En déduire le tableau de signes de f' puis les variations de f .

Exercice 5

On considère une fonction f deux fois dérivable sur \mathbb{R} . On a représenté ci-dessous la courbe de f' dans un repère orthonormé.



- 1) Déterminer le tableau de signes de f'' sur l'intervalle $[-6;7]$.
- 2) Déterminer le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-6;7]$.

Composition de fonctions

Exercice 6

Pour tout réel x , on pose $f(x)=1-3x^2$, $g(x)=5x-7$ et $h(x)=1-e^x$.
Donner une expression de $f \circ g$, $g \circ f$, $h \circ g$ et $f \circ h$

Exercice 7

Pour tout réel x , on pose $f(x)=xe^x$ et $g(x)=x^2-3x$
Donner une expression de $f \circ g$ et $g \circ f$

Exercice 8

Pour tout réel x , on pose $f(x)=5e^{2+x^2}$.
Ecrire f comme la composée de deux fonctions.

Exercice 9

Pour tout réel x , on pose $f(x)=(3-7x)^4$.
Ecrire f comme la composée de deux fonctions.

Exercice 10

Dériver les fonctions suivantes :

a) $f_1(x)=(5x^2-3)^2$

d) $f_4(x)=\cos(0,1x^2-3x)$

b) $f_2(x)=\frac{9}{(5-x)^3}$

e) $f_5(x)=(x+1)\sqrt{1+x^2}$

c) $f_3(x)=3e^{1-5x+x^2}+3$

f) $f_6(x)=x \sin(x^2)$

Convexité

Exercice 11

Etudier la convexité de ces fonctions :

a) $f(x)=2x^2-3x+14$

b) $g(x)=\sin x$, pour $x \in [0; \pi]$

c) $h(x)=\frac{1}{x}$

Exercice 12

Soit la fonction $f(x)=(x+1)e^x$

1) Etudier la convexité de f .

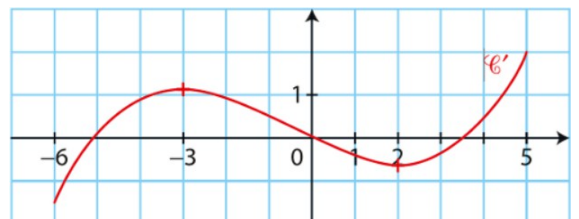
2) f admet-elle des points d'inflexion ?

Exercice 12

Soit une fonction f deux fois dérivable sur l'intervalle $[-6;5]$. Ci-contre la courbe de sa dérivée.

1) Dressez le tableau de variations de f .

2) Etudiez la convexité de f .



Exercice 13

On considère la fonction $f(x)=e^x$.

- 1) Quelle est l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 ?
- 2) En utilisant un argument sur la convexité, montrer que $e^x \geq 1+x$

Exercice 14

Démontrer les inégalités suivantes avec un argument de convexité:

- a) $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$
- b) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0, x^{n+1} - (n+1)x + n \geq 0$

Exercice 15

En utilisant un argument sur la convexité, montrer que:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, e^{\frac{x+y}{2}} \geq \frac{e^x + e^y}{2}$$

Exercice 16

Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction $f(x)=(1+x)^n$ définie sur $[-1; +\infty[$.

- 1) Quelle est l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 ?
- 2) Démontrer l'inégalité de Bernoulli: $\forall x \geq -1, (1+x)^n \geq 1+nx$

Domaine de définition, de dérivabilité

Exercice 17

Donnez les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1}$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{(x^2 - 5)(-x^2 + 5x - 4)}}$$

$$h(x) = \frac{2x^4 - 3x^2 + 1}{x^2 - 2}$$

$$k(x) = \frac{\sqrt{2x^4 - 3x^2 + 1}}{\sqrt{x-2}}$$

Exercice 18

Donnez le domaine de dérivabilité des fonctions précédentes.

Exercice 19

Soit la fonction f définie par: $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

- 1) Déterminez l'ensemble de définition de f .
- 2) Etudiez la parité de f .
- 3) f est-elle dérivable en 0 ? En déduire son domaine de dérivabilité.

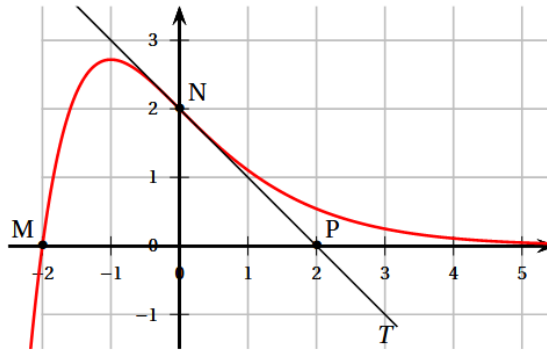
Exercice 20 sujet de bac

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur \mathbb{R} . On note f' sa fonction dérivée et f'' sa dérivée seconde.

Dans le repère orthonormé ci-dessous ont été représentés :

- la courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction f ;
- la tangente T à \mathcal{C}_f en son point $N(0; 2)$;
- le point $M(-2; 0)$ appartenant à \mathcal{C}_f et $P(2; 0)$ appartenant à la tangente T .

On précise que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle $] -\infty; -1]$.



Partie A : étude graphique

On répondra aux questions suivantes en utilisant le graphique.

1. a. Donner $f(0)$.
b. Déterminer $f'(0)$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3. La fonction f est-elle convexe sur \mathbb{R} ? Justifier.

Partie B : recherche d'une expression algébrique

On admet que la fonction f est de la forme

$$f(x) = (ax + b)e^{\lambda x},$$

où a, b et λ sont des constantes réelles.

Pour répondre aux questions suivantes, on utilisera les résultats de la partie A.

1. Justifier que $b = 2$.
2. Justifier que $-2a + b = 0$ puis en déduire la valeur de a .
3. Déterminer une expression algébrique de f . Justifier.

Partie C : étude algébrique

On admet que la fonction f est définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = (x + 2)e^{-x}.$$

Laisser la question 1 de côté, nous n'avons pas encore vu les limites de fonction.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. On admet que $f'(x) = (-x - 1)e^{-x}$. Dresser le tableau de variations complet de f . Justifier.
3. a. Étudier la convexité de f .
b. Préciser les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe \mathcal{C}_f .