Limite de suites

Limites directes

Exercice 1

Déterminer les limites des suites suivantes :

a) $u_n=3n^2+\sqrt{n}$ b) $v_n=\frac{3}{n}-2n^2-n$ c) $w_n=n^4+e^{-n}$ d) $x_n=\frac{-1}{n^2}+\frac{7}{n^3}+3$

Exercice 2

Déterminer les limites des suites suivantes :

a) $u_n=3n^2+\sqrt{n}$ b) $v_n=\frac{3}{n}-2n^2-n$ c) $w_n=n^4+e^{-n}$ d) $x_n=\frac{-1}{n^2}+\frac{7}{n^3}+3$

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n=4n+10$.

1) Soit un réel M, déterminer le plus petit entier n_0 tel que $u_n\geqslant M$.
2) En déduire la limite de (u_n) .

Exercice 4

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n=-2n^2-7$

1) Soit un réel M positif, déterminer le plus petit entier n_0 tel que $u_n\leqslant -M$.
2) En déduire la limite de (u_n) .

Exercice 5

Déterminer les limites des suites suivantes :

a) $u_n=\frac{-7}{\sqrt{n}}-2$ b) $v_n=5+\frac{1}{1+n^2}$ c) $w_n=3n^2+6n-15$ d) $x_n=(2n-1)(n^2+3)$

Exercice 6

Déterminer les limites des suites suivantes :

a) $u_n=(1-n^2)(5n-17)$ b) $v_n=(1-7n)^3+29$ c) $w_n=n-3n$

Lever une indétermination

Exercice 7

Déterminer les limites suivantes en factorisant le terme de plus haut degré :

a) $u_n=n^2-3n+5$ b) $v_n=n^5-3n^7+n^4-2n^8$ c) $w_n=n-\sqrt{n}$

Exercice 8

Déterminer les limites suivantes en factorisant le terme de plus haut degré :

a) $u_n=\frac{3n^2-5n+1}{1-n^2}$ b) $v_n=\frac{2+5n}{3-n-5n^2}$ c) $w_n=\frac{10n-n(4-n)}{3n^2-n+7}$

Exercice 8

Déterminer les limites suivantes en utilisant la forme conjuguée :

a) $u_n=\sqrt{3+5n}-\sqrt{7+4n}$ b) $v_n=\sqrt{n-1}-\sqrt{n+200}$ c) $w_n=n(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}})$

Limites par étude de variation

Exercice 9

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_0=0$ et $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+1$

1) Montrer que pour tout entier n, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
2) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 10

Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n non nul, par*

$$u_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}$$

1) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
2) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1, u_n \leqslant 2-\frac{1}{n}$
3) Que peut-on en déduire ?

Exercice 11

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel par $\begin{cases} u_0=24 \\ u_{n+1}=\sqrt{u_n+12} \end{cases}$

Partie 1

1) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
2) Démontrer qu'elle est minorée par 0.
3) En déduire que (u_n) converge.

Partie 2

1) Conjecturer la limite, notée l, de (u_n) à la calculatrice.
2) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-l=\frac{u_n-4}{4+\sqrt{u_n+12}}$.
3) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-l \leqslant \frac{1}{8}(u_n-4)$.
4) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n-4 \leqslant \frac{1}{8^n}$.
5) En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 12

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\frac{1}{10}u_n(20-u_n) \end{cases}$

1) Soit la fontion f définie sur [0;20] par $f(x)=\frac{1}{10}x(20-x)$

   a. Etudier les variations de f sur l'intervalle [0;20].

   b. En déduire que si $x \in [0;10]$ alors $f(x) \in [0;10]$.
2) Déterminer u_1 et u_2 .
3) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.
4) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Limites par comparaison

Exercice 13

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n=((-1)^n-4)n^2$.

1) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant -3n^2$.
2) En déduire la limite de (u_n) .

Exercice 14

Déterminer la limite des suites suivantes à l'aide d'une comparaison.

a. $a_n=(-1)^n+n$ b. $b_n=3\sin(n+2)-5n$ c. $c_n=1-\dfrac{\cos(n)}{n}$

Exercice 15

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n=\dfrac{\cos(n^2-1)}{n+1}$.

1) Démontrer que $\dfrac{-1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
2) En déduire la limite de (u_n) .

Exercice 16 sujet de bac (métro 2021)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1$$

1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$
3. En déduire le sens de variations de la suite (u_n) ainsi que la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$$

Exercice 17

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 5$.

1. Etudier les variations de la suite (u_n).
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n + 1$
3. En déduire la limite de la suite (u_n).
4. Calculer les premiers termes de la suite (u_n), puis conjecturer l'expression de u_n en fonction de n.
5. Démontrer la conjecture de la question précédente.

Exercice 18

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n=\dfrac{(-1)^n+n}{(-1)^n+2}$.

Montrer que pour tout entier naturel n $u_n \geqslant \dfrac{n-1}{3}$, puis en déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 19

Suite de Héron - type Bac

PARTIE 1 : Étude d'une fonction f

On considère la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{2}(x+\frac{2}{x})$.

1.a) Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

1.b) Déterminer les variations de f sur $]0;+\infty[$.

1.c) Démontrer que si $x \geq \sqrt{2}$ alors $f(x) \geq \sqrt{2}$.

PARTIE 2 : Étude de la suite (u_n)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

2.a) Déterminer u_1, u_2, u_3 à 0.1 près

2.b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$.

2.c) En déduire que (u_n) est convergente.

2.d) On note l la limite de la suite u. Démontrer que l est solution de l'équation $l=\frac{1}{2}(l+\frac{2}{l})$.

2.e) En déduire la valeur de l.

2.f) Que faut-il changer à la définition de la suite (u_n) pour qu'elle converge vers $\sqrt{3}$.

Limites de suites géométriques

Exercice 20

Déterminer la limite des suites suivantes :

a. $a_n=5-1{,}01^n$ b. $b_n=-3\times 0{,}8^{n+1}$ c. $c_n=\dfrac{2+0{,}5^n}{2^n-1}$

Exercice 21

Déterminer la limite des suites suivantes :

a. $a_n=\dfrac{5^n}{3^n}$ b. $b_n=2^n-5^n$ c. $c_n=\dfrac{3^n+5^n}{10^n}$

Exercice 22

(u_n) est la suite définie par $u_0=10$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=0,5u_n+3$:

1. Démontrer que (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2. (v_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n=u_n-6$.

- **a.** Démontrer que (v_n) est géométrique.
- **b.** En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.
- **c.** En déduire la limite de (u_n)

Exercice 23

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation: $u_{n+1}=au_n+b$ (a et b réels non nuls tels que $a\neq 1$).

On pose, pour tout entier naturel n, $v_n=u_n-\dfrac{b}{1-a}$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison a.

b. En déduire que si a appartient à l'intervalle]-1 ; 1[, alors la suite (u_n) a pour limite $\dfrac{b}{1-a}$.

c. Application : on considère la suite (h_n) définie par $h_0=80$ et pour tout entier naturel n, $h_{n+1}=0.75h_n+30$.
La suite (h_n) est-elle convergente? Justifier.

Exercice 24

Soit la suite (u_n) définie par $u_0=8$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1}=0.5u_n+4n-3$.
Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n=u_n-8n+22$.
A l'aide d'un tableur, on obtient:

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	8	30
3	1	1	15
4	2	1.5	7.5
5	3	5.75	3.75
6	4	11,875	1,875

a. Conjecturer une expression explicite de v_n, puis démontrer cette conjecture.

b. En déduire une expression explicite de u_n, puis indiquer si la suite (u_n) est convergente.

Exercice 25

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 8}$.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
2. Étudier les variations de la suite (u_n).
3. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.
4. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = 1 + \dfrac{7}{u_n}$.

- **a.** Montrer que (v_n) est géométrique et préciser la raison et v_0.
- **b.** Exprimer pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.
- **c.** En déduire la limite de la suite (u_n).
- **d.** Déterminer, après avoir justifié son existence, le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, $u_n < 10^{-18}$.

Sources

ex 13 : https://www.mathoutils.fr/cours-et-exercices/terminale-generale/comparaisons-des-limites-exercices-corriges/

ex 18 : https://xymaths.fr/Lycee/Terminale-generale-specialite-mathematiques/Exercices-Corriges-Suites/gendarmes.php

ex 22, 23, 24,25:
https://jaicompris.com/lycee/math/suite/suite_limite_geometrique.php