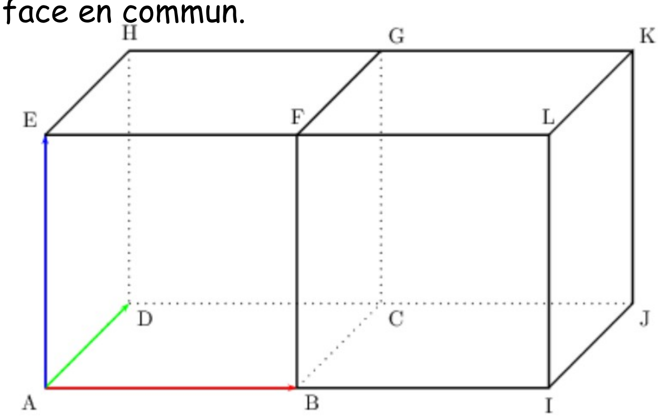
Vecteurs, droites et plans de l'espace

Combinaison linéaire de vecteurs

Exercice 1

On considère deux cubes ayant une face en commun.



a) Placez le point X tel que:
$\overrightarrow{AX}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{AD}$

b) Placez le point Y tel que:
$\overrightarrow{HY}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EL}+\overrightarrow{FB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CI}$

c) Placez le point Z tel que:
$2\overrightarrow{AZ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FK}+\overrightarrow{BF}$

d) Ecrire $\overrightarrow{IG}$ comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

e) Ecrire $\overrightarrow{JE}$ comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

Exercice 2

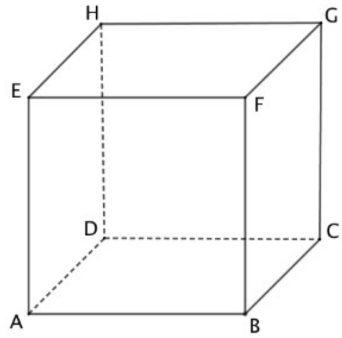
On considère le cube suivant.

Tracer un représentant des vecteurs suivants:

a) $\vec{a}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HE}$

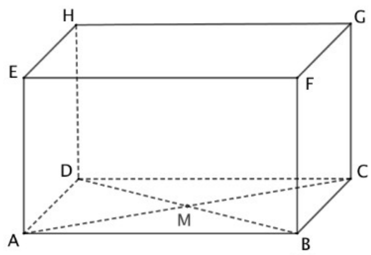
b) $\vec{b}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{EH}$

b) $\vec{c}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{CG}$

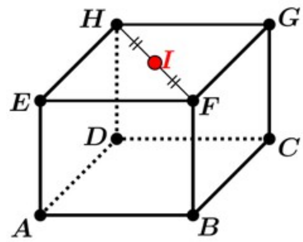


Exercice 3

Dans le parallélépipède ci-contre, M est le centre du rectangle ABCD.
Exprimez les vecteurs $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MF}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.



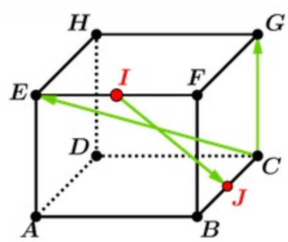
Exercice 4



ABCDEFGH est un cube, I est le milieu de [HF].
Le point M vérifie $2\overrightarrow{\mathrm{IM}}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}$
1- Exprimer $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$.
2- Placer le point M.
3- Démontrer, sans utiliser de coordonnées, que les points E, M et C sont alignés.

Exercice 5

On considère le cube ABCDEFGH, I est le milieu de [EF] et J est le milieu de [BC].
1) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{GC}$ sont coplanaires.
2) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{GC}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont coplanaires.



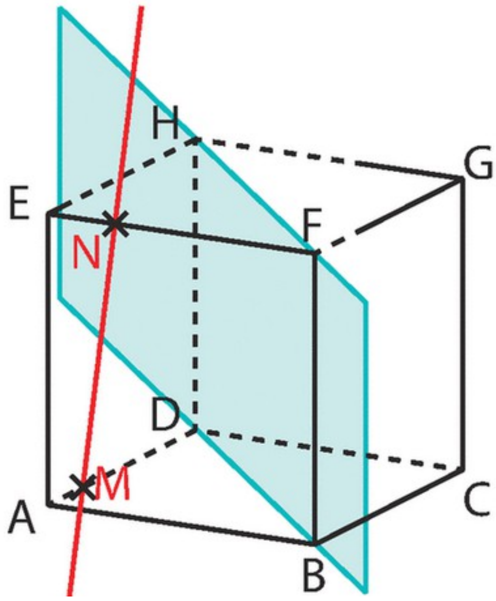
Parallèlisme

Exercice 6

Soit un cube ABCDEFGH.
On considère les points M et N tels que :

$$\overrightarrow{EN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{EF} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

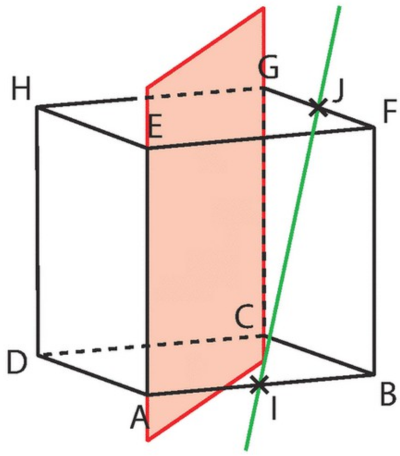
Pour démontrer qu'une droite est parallèle à un plan, il suffit de montrer qu'un de ses vecteurs directeurs est une combinaison linéaire d'une base de ce plan.



1) Exprimez le vecteur $\overrightarrow{MN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DH}$.

2) Que peut-on en conclure ?

Exercice 7



Soit un cube ABCDEFGH.
On place J le mileu de [GF] et I le milieu de [AB].

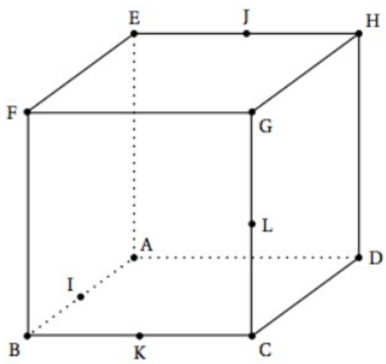
1) Exprimez le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$.

2) En déduire la position relative de (IJ) et de (ACE).

Exercice 8

Soit un cube ABCDEFGH.
On place I,J,K et L les milieux des côtés indiqués sur la figure ci-contre.

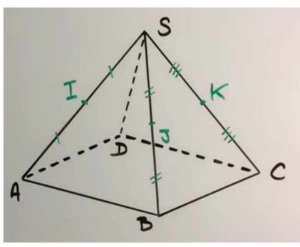
1) Montrer que $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
2) Montrer $\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$.
3) En déduire que (IKL) est parallèle à (ACH).



Exercice 9

Soit un tétraèdre ABCDS et I,J,K les milieux des arêtes indiquées sur la figure ci-contre.

Démontrer que (IJK) est parallèle à (ABCD).



Coordonnées

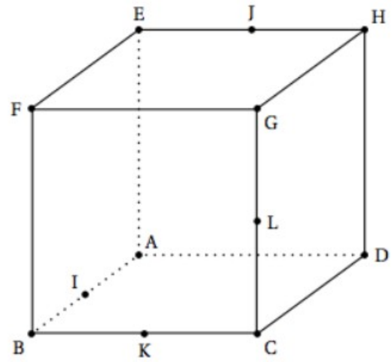
Exercice 10

Dans un repère de l'espace, on considère les points $A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}0\\5\\2\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}0\\-11\\4\end{pmatrix}$.

Ces quatres points sont-ils coplanaires ?

Exercice 11

Soit un cube ABCDEFGH. On place I,J,K et L les milieux des côtés indiqués sur la figure ci-contre.
On se place dans le repère $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BF})$



1) Déterminer les coordonnées des points I,J,K et L.
2) Les points I,J,K et L sont-ils coplanaires ?

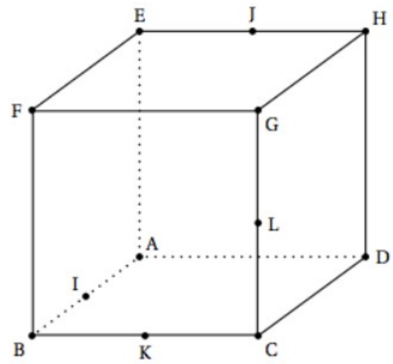
Exercice 12

Dans un repère de l'espace, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}2\\6\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$.

Montrer que ces 3 vecteurs sont coplanaires.

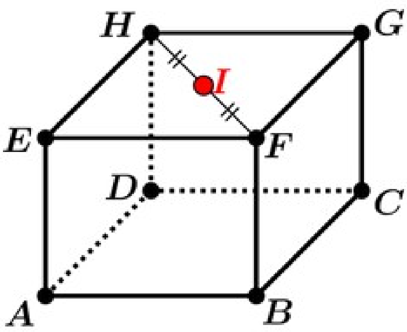
Exercice 13

Soit un cube ABCDEFGH. On place I,J,K et L les milieux des côtés indiqués sur la figure ci-contre.



Quelle est la nature du triangle IJL ?

Exercice 14



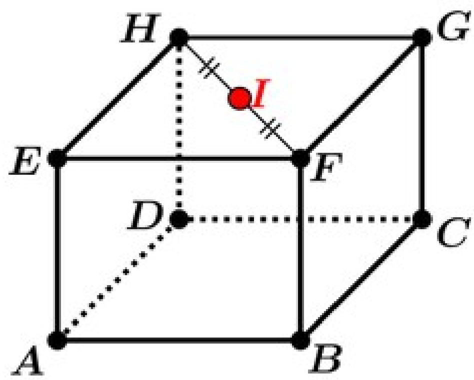
ABCDEFGH est un cube, I est le milieu de [HF].
Le point M vérifie $2\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{MA}$
Démontrer, en utilisant un repère adapté, que les points E, M et C sont alignés.

Section

Déterminer les section de ces solides.

Exercice 15

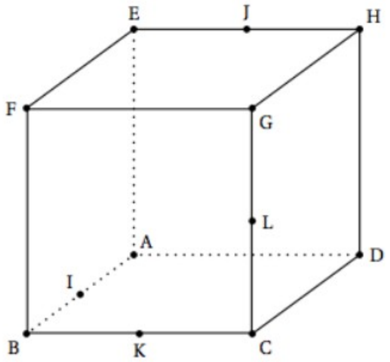
La section du cube par le plan (AID)



Exercice 16

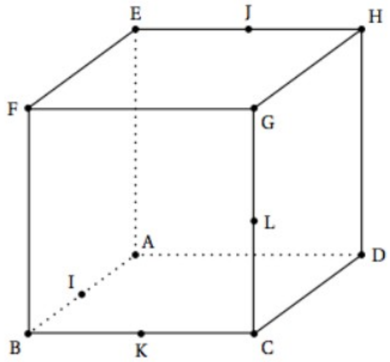
I, J, K et L sont les milieux

La section du cube par le plan (AKG).



Exercice 17

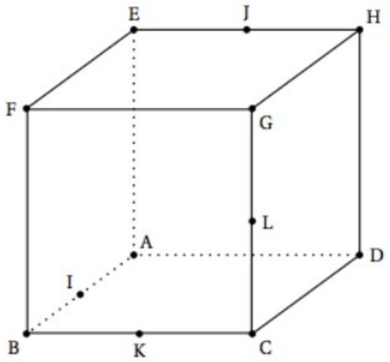
La section du cube par le plan (LKD).



Exercice 18

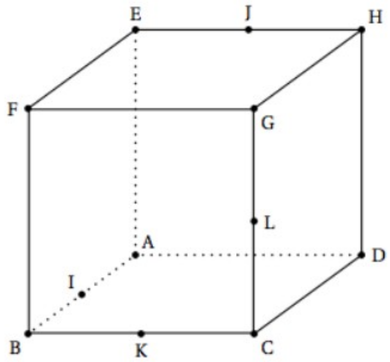
I, J, K et L sont les milieux

La section du cube par le plan (ICH).



Exercice 19

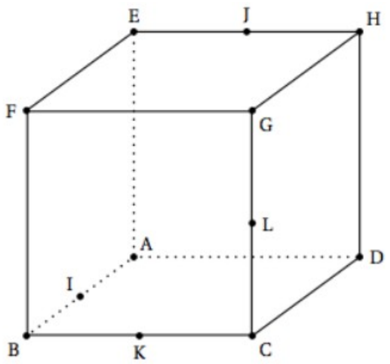
La section du cube par le plan (EHK).



Exercice 20

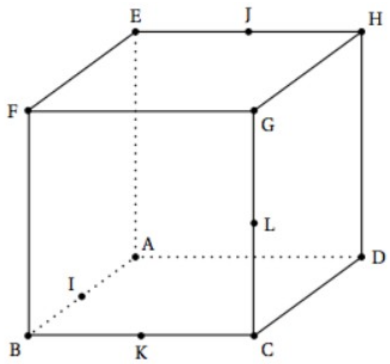
I, J, K et L sont les milieux

La section du cube par le plan (EAL).



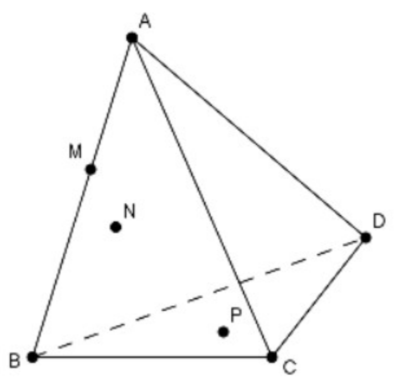
Exercice 21

La section du cube par le plan (JIK).



Exercice 22

On considère un tétraèdre ABCD. M un point de [AB], N un point du plan (ABC) et P un point du plan (BCD). Déterminer la section du plan (MNP) avec le tétraèdre.

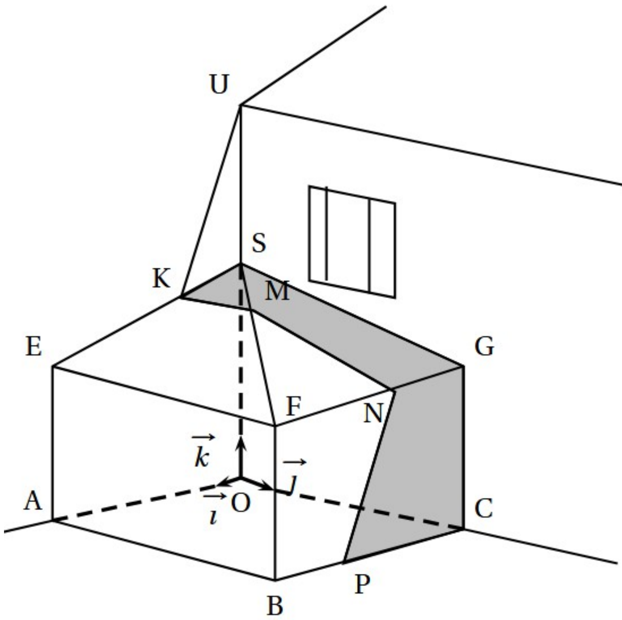


Exercice 23

Un particulier s'intéresse à l'ombre portée sur sa future véranda par le toit de sa maison quand le soleil est au zénith. Cette véranda est schématisée ci-dessous en perspective cavalière dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Le toit de la véranda est constitué de deux faces triangulaires SEF et SFG.

- Les plans (SOA) et (SOC) sont perpendiculaires.
- Les plans (SOC) et (EAB) sont parallèles, de même que les plans (SOA) et (GCB).
- Les arêtes [UV] et [EF] des toits sont parallèles.

Le point K appartient au segment [SE], le plan (UVK) sépare la véranda en deux zones, l'une éclairée et l'autre ombragée. Le plan (UVK) coupe la véranda selon la ligne polygonale KMNP qui est la limite ombre-soleil.



1. Sans calcul, justifier que :

a. le segment [KM] est parallèle au segment [UV] ;

b. le segment [NP] est parallèle au segment [UK].

2. Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Les coordonnées des différents points sont les suivantes : A(4 ; 0 ; 0), B(4 ; 5 ; 0), C(0 ; 5 ; 0), E(4 ; 0 ; 2, 5), F(4 ; 5 ; 2,5), G(0 ; 5 ; 2,5), S(0 ; 0 ; 3,5), U(0 ; 0 ; 6) et V(0 ; 8 ; 6).

On souhaite déterminer de façon exacte la section des faces visibles de la véranda par le plan (UV K) qui sépare les zones ombragée et ensoleillée.

a. Au moment le plus ensoleillé, le point K a pour abscisse 1,2. Vérifier que les coordonnées du point K sont (1,2 ; 0 ; 3,2).

b. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (7 ; 0 ; 3) est un vecteur normal au plan (UVK) et en déduire une équation cartésienne du plan (UVK).

c. Déterminer les coordonnées du point N intersection du plan (UVK) avec la droite (FG).

d. Expliquer comment construire la ligne polygonale sur le schéma de la véranda.

3. Afin de faciliter l'écoulement des eaux de pluie, l'angle du segment [SG] avec l'horizontale doit être supérieur à 7°. Cette condition est-elle remplie ?

Sources

ex 1 : https://maths-bac.com/maths-Term-spe/menu-exercices-espace-ex1.html

ex 2,3: https://www.maths-et-tiques.fr/telech/20Esp1.pdf

ex 4,5 : https://jaicompris.com/lycee/math/espace/vecteur-espace.php

ex 6 : https://manuel.sesamath.net/numerique/diapo.php?atome=93458&ordre=1

ex 7 : https://manuel.sesamath.net/numerique/diapo.php?atome=93460&ordre=1

ex 23 : sujet bac 2017