Probas et suites

Compétence 1 : Indépendance

Exercice 1

a) On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Soit R l'événement : « On tire un roi ».

Soit T l'événement : « On tire un trèfle ».

Les événements R et T sont-ils indépendants ?

b) On reprend l'expérience précédente en ajoutant deux jokers au jeu de cartes.
Les événements R et T sont-ils indépendants ?

Exercice 2

Dans une population, un individu est atteint par la maladie m avec une probabilité égale à 0,005 et par la maladie n avec une probabilité égale à 0,01.
On choisit au hasard un individu de cette population.

Soit M l'événement : « L'individu a la maladie m ».

Soit N l'événement : « L'individu a la maladie n ».

On suppose que les événements M et N sont indépendants.

Calculer la probabilité de l'événement: E « L'individu a au moins une des deux maladies ».

Exercice 3

Sur son trajet habituel domicile-travail, une automobiliste rencontre deux feux tricolores qui fonctionnent de manière indépendante :

- la probabilité de devoir s'arrêter au premier feu est de $\frac{1}{3}$.
- la probabilité de devoir s'arrêter au second feu est de $\frac{5}{12}$.

a. Quelle est la probabilité que l'automobiliste s'arrête deux fois ?
b. Quelle est la probabilité que l'automobiliste ne s'arrête à aucun feu sur son trajet ?
c. Quelle est la probabilité que l'automobiliste s'arrête au moins une fois sur son trajet ?

Exercice 4

Préciser dans chaque cas si les événements A et B sont indépendants:

a. $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0,36$ et $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0,4$ et $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = 0,9$.
b. $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0,4$ et $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0,5$ et $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}}) = 0,2$.
c. $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0,8$ et $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0,6$ et $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = 0,4$.

Compétence 2 : Suites et arbres

Exercice 5

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide.

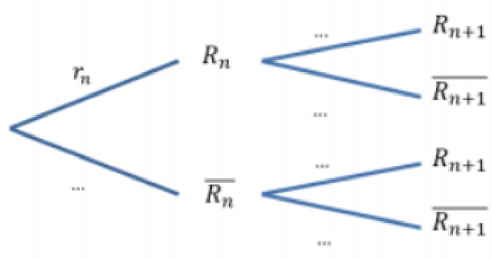
On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.

Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

- à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est $0,9$;
- si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est $0,95$;
- si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est $0,2$.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'événement « le client rapporte la bouteille de son panier de la n-ième semaine ».

1. Pour tout entier naturel n non nul, on note r_n la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la n-ième semaine. On a alors $r_n = P(R_n)$.
   Recopier et compléter l'arbre pondéré (aucune justification n'est attendue) :



2. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = 0,75 \times r_n + 0,2$.

3. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la suite (v_n) définie par $v_n = r_n - 0,8$.
   Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
4. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, l'expression de r_n en fonction de n.

5. Conjecturer la limite de la suite (r_n) quand n tend vers $+\infty$.
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 6

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,04$.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

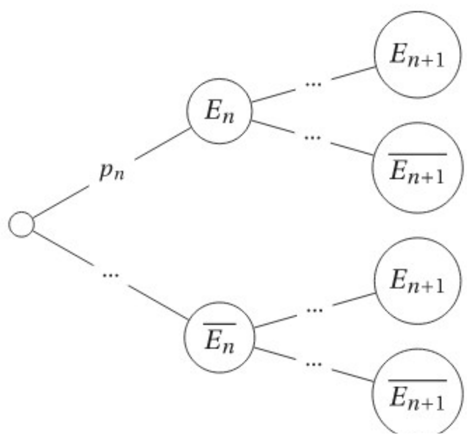
On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement *"le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine"*. On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.

On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

1) Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.

2) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

3) Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



4) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.

5) Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r.

6) En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r.

7) En déduire la limite de la suite (p_n).

Source

Exercice 1 et 2 : https://www.maths-et-tiques.fr/telech/19CondPM.pdf

Ex 3 et 4 : https://jaicompris.com/lycee/math/probabilite/probabilite-independant.php

ex 5 : https://www.annales2maths.com/1ere-exercices-corriges-probabilites-et-suites/

ex 6 : bac S 2013 pondichéry