Limite de fonctions

Limites

Exercice 1

Déterminer les limites demandées :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x+\frac{1}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} (x+1)\left(1+\frac{1}{x}\right)$

(c) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x^2-x+2$

(d) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} (x+2)(1-x)$

(e) $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} x+\frac{1}{x}$

(f) $\lim\limits_{x\mapsto 1^+} \frac{x-1}{x}+\frac{x}{x-1}$

Exercice 2

Déterminer les limites demandées :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x^2+5}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{x^2+5}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x(-x-1)}{(x^2+2)(x+3)}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3+2x^2}{(x+2)(x-5)}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-3x^2+5x-1}{4x^2+x+1}$

Exercice 3

Déterminer les limites demandées :

1. $\lim\limits_{x\to-3^+} \frac{1}{-2x-6}$
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)(x-3)\right)$
3. $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{1-4x}{x-3}$
4. $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x^3}{4-2x}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+2-3x}{x}$
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x+5}{\sqrt{-x}}$
7. $\lim\limits_{x\to-2^-} \frac{-2x}{3x+6}$

Exercice 4

Soit la fonction $f(x)=\frac{3x^3-x}{x^3+2x^2}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de *f*.
2) Déterminer les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice 5

Soit f une fonction réelle périodique et admettant une limite finie l en +∞.
Montrer que f est constante.

Asymptotes

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2;1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+5x+1}{x^2+x-2}$.

Combien d'asymptotes possède la courbe représentative de cette fonction? Déterminer leur équation.

Exercice 7

Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$ par $f(x) = \dfrac{3x^2-4}{x^2-1}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Montrer que $\mathscr{C}_f$ possède une asymptote horizontale.
2. Etudier sa position relative par rapport à cette asymptote.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.
4. Que peut-on en déduire?
5. Existe-t-il une autre valeur pour laquelle cela soit également vrai?

Exercice 8

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x-1}{x+1}}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3) Préciser si la courbe de f admet des asymptotes.

Exercice 9

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$.

1) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

2) Montrer que $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$, et calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3) En déduire l'existence de deux asymptotes de la courbe C.

Théorème de comparaison

Exercice 10

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 + x\cos x$

Exercice 11

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\cos x}{x^2+1}$

Exercice 12

On considère une fonction f.

1) Si $f(x) \leqslant e^x$, que peut-on dire sur la limite de f en $-\infty$.
2) Si $f(x) \geqslant x^3$, que peut-on dire sur la limite de f en $+\infty$.
3) Si $f(x) \leqslant -e^x$, que peut-on dire sur la limite de f en $+\infty$.
4) Si $f(x) \geqslant x\cos x$, que peut-on dire sur la limite de f en $+\infty$.

Exercice 13

1) Soit f une fonction telle que pour tout $x>1$, $\frac{2}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{2}{x}$. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

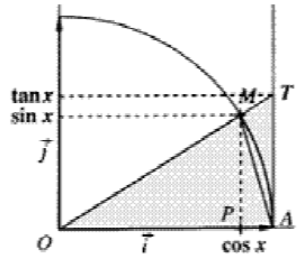
2) Soit f une fonction telle que pour tout $x>1$, $\frac{2}{x} \leq f(x) - \frac{3}{2} \leq \frac{3}{x}$. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

Les propriétés suivantes permettent-elles de conclure concernant $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$?

3) $f(x) \geq 2x-3$ 4) $f(x) \geq x^2 - 3$

Exercice 14

Soit x un réel de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les points A(1;0), M($\cos x$;$\sin x$), P($\cos x$;0) et T(1;$\tan x$). Soit A_1 l'aire du triangle OAM, A_2 l'aire du secteur de disque OAM et A_3 l'aire du triangle OAT.



1) En comparant ces aires, prouver que : $\sin x \leq x \leq \tan x$.
2) En déduire que $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.
3) Déterminer la limite de $\frac{\sin x}{x}$ en 0 (étudier les cas $x < 0$ et $x > 0$).

Exercice 15

En utilisant le résultat $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (cf exercice précédent), étudiez les limites en 0 des fonctions :

1) $x \to \frac{\sin 5x}{2x}$ 2) $x \to \frac{x}{\sin 3x}$ 3) $x \to \frac{\sin 5x}{\sin 4x}$ 4) $x \to \frac{\tan x}{x}$

Croissance comparée

Exercice 16

Déterminer les limites suivantes

a) $f(x)=(x^2-2x)e^x$ en $-\infty$ b) $g(x)=\frac{e^x}{1-3x^3}$ en $+\infty$

c) $h(x)=x^2e^x-x$ en $-\infty$ d) $k(x)=e^x(x-2)$ en $-\infty$

Exercice 17

Démontrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Astuce : Nombre dérivé

Exercice 18

En utilisant un taux d'accroissement, déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$

Exercice 19

Déterminer les limites suivantes en 0

a) $\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}$ b) $\frac{\sin x}{x}$ c) $\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}$

Exercice 20

1. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x+2}-e^2}{x}$ **2.** $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$

3. $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(2-x)}{x-1}$ **4.** $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\exp(\cos x)-1}{x-\frac{\pi}{2}}$.

Sources

ex 1 : https://chingmath.fr/tle-spe/fonctions-numeriques

ex 2,3 : https://www.annales2maths.com/exercices-ts-limites-fonctions/

ex 5 : https://www.bibmath.net/ressources/index.php?action=affiche&quoi=bde/analyse/unevariable/limitecontinuite&type=fexo

ex 6,7 : https://www.annales2maths.com/exercices-ts-limites-fonctions/

ex 9,10 : https://lecluseo.scenari-community.org/TS/Ch02Limites_web_gen_auroraWSH.zip/co/ER3.html

ex 12 à 15 : http://lycee.lagrave.free.fr/IMG/pdf/exercices_corriges_sur_limites.pdf