

Probabilité : loi binomiale

Rappel de 1^{ère}

Exercice 1 formule probabilités totale

Dans une classe, 80% des élèves ont un téléphone portable. Parmi eux, 60% ont une connexion internet sur leur téléphone.

Quelle est la probabilité qu'un élève choisi au hasard ait un portable sans connexion internet ?

Vous pouvez vous aider d'un tableau ou d'un arbre mais la réponse devra être justifiée uniquement par un calcul.

Exercice 2 formule probabilités totale

Vous venez de passer un test pour le dépistage du cancer. Le médecin vous convoque pour vous annoncer le résultat : mauvaise nouvelle, il est positif. Pas de chance, alors que ce type de cancer ne touche que 0.1% de la population.

Vous demandez alors au praticien si le test est fiable. Sa réponse est sans appel : « Si vous avez le cancer, le test sera positif dans 90% des cas ; alors que si vous ne l'avez pas, il sera négatif dans 97% des cas ». L'affaire paraît entendue...

A votre avis, après le résultat d'un tel test, quelle est la probabilité que vous ayez le cancer ?

Exercice 3 avec des suites

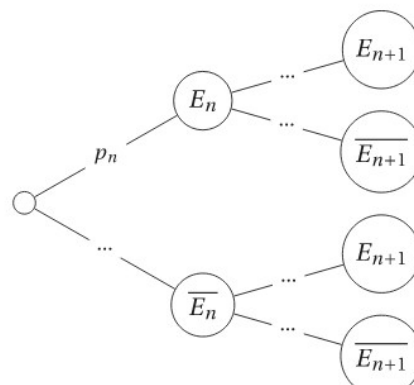
Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à 0,04.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à 0,24.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement "le salarié est absent pour cause de maladie la n -ième semaine". On note p_n la probabilité de l'évènement E_n .

On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leq p_n < 1$.

- 1) Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.
- 2) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.
- 3) Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



- 4) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,
- $$p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04.$$
- 5) Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par
- $$u_n = p_n - 0,05$$
- est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r .
- 6) En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r .
- 7) En déduire la limite de la suite (p_n) .

Exercice 4 indépendance

a) On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Soit R l'événement : « On tire un roi ».

Soit T l'événement : « On tire un trèfle ».

Les événements R et T sont-ils indépendants ?

b) On reprend l'expérience précédente en ajoutant deux jokers au jeu de cartes.
Les événements R et T sont-ils indépendants ?

Exercice 5 indépendance cas pratique

Afin d'établir les liens entre le surpoids et l'alimentation, on interroge les enfants des écoles primaires d'une ville.

L'enquête révèle que 60 % des enfants boivent 1 boisson sucrée ou plus par jour. Parmi les enfants buvant 1 boisson sucrée ou plus par jour, un enfant sur 8 est en surpoids, contre seulement 8 % pour les enfants buvant moins d'une boisson sucrée par jour.

On choisit un enfant au hasard parmi ceux des écoles primaires de la ville et on considère les événements :

- B : « L'enfant boit 1 boisson sucrée ou plus par jour »
- S : « L'enfant est en surpoids »

1. Justifier que $P_B(S) = 0,125$.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
3. Calculer $P(B \cap S)$ puis interpréter le résultat obtenu.
4. Déterminer la probabilité que l'enfant soit en surpoids.
5. On a choisi un enfant en surpoids. Quelle est la probabilité qu'il boive 1 boisson sucrée ou plus par jour ?
On arrondira le résultat au millième.
6. Les événements B et S sont-ils indépendants ?

Loi binomiale

Exercice 6

On considère la loi binomiale $X \sim \text{Bin}(100, 0.5)$

Calculer les probabilités suivantes :

- | | |
|-------------------|---------------------------|
| a) $P(X=50)$ | d) $P(X < 40)$ |
| b) $P(X \leq 30)$ | e) $P(X \geq 70)$ |
| c) $P(X \geq 30)$ | f) $P(30 \leq X \leq 70)$ |

Exercice 7

On considère la loi binomiale $X \sim \text{Bin}(1\,000, 0.05)$

Calculer les probabilités suivantes :

- | | |
|--------------------|---------------------------|
| a) $P(X=100)$ | d) $P(X < 40)$ |
| b) $P(X \leq 800)$ | e) $P(X \geq 50)$ |
| c) $P(X \geq 80)$ | f) $P(35 \leq X \leq 65)$ |

Exercice 8

Une entreprise produit en grande quantité des pièces détachées destinées à l'industrie.

On note D l'évènement : «une pièce prélevée au hasard dans la production n'est pas conforme».

On suppose que $P(D)=0,03$

Je veux passer une commande de 300 pièces. La production est assez importante pour que l'on puisse considérer que la conformité d'une pièce est indépendante des autres pièces.

On considère la variable aléatoire X qui, à un lot de 300 pièces, associe le nombre de pièces non conformes qu'il contient.

1. X suit une loi binomiale. Précisez les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité $P(X)=0$. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} .
3. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins 5 pièces non conforme dans ce lot de 300 pièces.
4. Calculer l'espérance mathématique, E(X), de cette variable aléatoire et interpréter le résultat.
5. Combien de pièces dois-je commander, pour être sûr à 99%, d'avoir 300 pièces conformes ?

Exercice 9 Bac ES Antille 2018

Une compagnie aérienne a mis en place pour une de ses lignes un système de sur-réservation afin d'abaisser les coûts.

Les réservations ne peuvent se faire qu'auprès d'une agence ou sur le site Internet de la compagnie.

Sur cette ligne, la compagnie affrète un appareil de 200 places et a vendu 202 réservations.

On considère que 97,1% des clients se présentent à l'embarquement.

- 1) Peut-on dire que le nombre de clients se présentant à l'embarquement peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 202$ et $p = 0,971$.

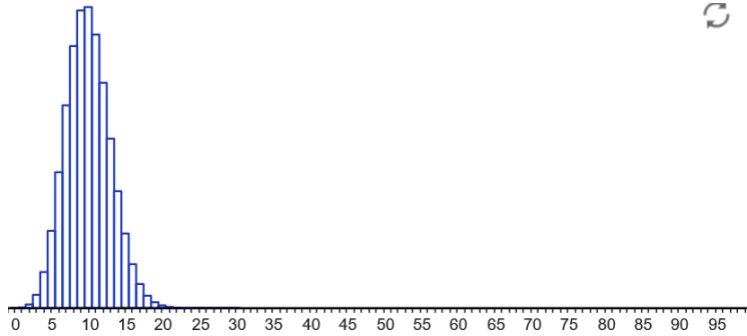
Dans la suite de l'exercice , on admet que $X \sim \text{Bin}(202, 0.971)$.

- 2) Calculer la probabilité que tous les clients se présentent à l'embarquement.
- 3) Calculer la probabilité qu'un seul client parmi les qui ont réservé ne se présente pas à l'embarquement.
- 4) En déduire la probabilité que la compagnie se trouve en situation de sur-réservation (c'est-à-dire avec plus de clients qui se présentent à l'embarquement que de places).

Espérance et écart-type

Exercice 10

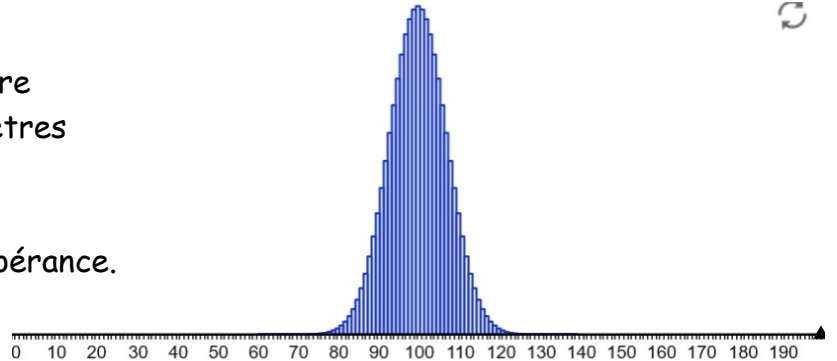
On donne le diagramme en barre associé à une loi binomiale de paramètres $n=100$ et p inconnu.



- 1) Déterminer graphiquement son espérance.
- 2) En déduire p .
- 3) Calculer son écart-type.
- 4) Interpréter graphiquement l'écart-type (on cherchera un intervalle de fluctuation)

Exercice 11

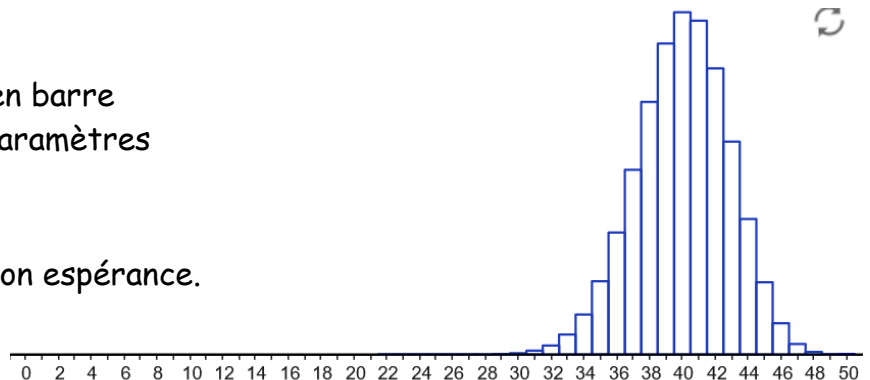
On donne le diagramme en barre associé à une loi binomiale de paramètres $n=200$ et p inconnu.



- 1) Déterminer graphiquement son espérance.
- 2) En déduire p .
- 3) Calculer son écart-type.
- 4) Interpréter graphiquement l'écart-type (on cherchera un intervalle de fluctuation)

Exercice 12

On donne le diagramme en barre associé à une loi binomiale de paramètres $n=200$ et p inconnu.



- 1) Déterminer graphiquement son espérance.
- 2) En déduire p .
- 3) Calculer son écart-type.
- 4) Interpréter graphiquement l'écart-type (on cherchera un intervalle de fluctuation)

Exercice 13

Un groupe de musique veut jouer dans une petite salle et on considère que le nombre de billets vendus suit une loi binomiale de paramètres $n=110$ et $p=0.20$.

Pour être certain de gagner de l'argent, le groupe ne joue pas s'il y a moins de 15 spectateurs prévus.

Le groupe est-il sûr, au seuil de 95%, de jouer ce soir-là ?

Exercice 14

On considère la loi binomiale $X \sim \text{Bin}(1000, 0.05)$.

- 1) Donner un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95%.
- 2) Donner un intervalle de fluctuation centré au seuil de 80%.

Exercice 15

On considère la loi binomiale $X \sim \text{Bin}(250, 0.6)$.

- 1) Donner un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95%.
- 2) Donner un intervalle de fluctuation centré au seuil de 80%.

Dénombrement

Exercice 16

On trace dans un plan 7 droites telles que deux droites ne sont jamais parallèles, et 3 droites ne sont jamais concourantes.

Combien de triangles a-t-on ainsi tracé ?

Exercice 17

Je veux placer 30 élèves dans ma salle de classe qui a exactement 30 places assises.

Combien de plans de classe puis-je faire ?

Exercice 18

Lorsqu'on permute les lettres d'un mot, on obtient une anagramme de ce mot. On s'intéresse aux anagrammes du mot "CHIEN", sans tenir compte de la signification.

1. Combien y-a-t-il d'anagrammes ?
2. Combien y-a-t-il d'anagrammes commençant par la lettre C ?
3. Combien y-a-t-il d'anagrammes commençant par une consonne ?

Exercice 19

Une main au poker est formée de 5 cartes extraites d'un jeu de 52 cartes.

Traditionnellement, trèfle, carreau, coeur, pique sont appelées couleurs et les valeurs des cartes sont rangées dans l'ordre : as, roi, dame, valet, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, de la plus forte à la plus faible.

Dénombrer les mains suivantes :

1. quinte flush : main formée de 5 cartes consécutives de la même couleur (Attention! la suite as, 2, 3, 4 et 5 est une quinte flush).
2. carré : main contenant 4 cartes de la même valeur (4 as par exemple).
3. full : main formée de 3 cartes de la même valeur et de deux autres cartes de même valeur (par exemple, 3 as et 2 rois).
4. quinte : main formée de 5 cartes consécutives et qui ne sont pas toutes de la même couleur.
5. brelan : main comprenant 3 cartes de même valeur et qui n'est ni un carré, ni un full (par exemple, 3 as, 1 valet, 1 dix).



Indication

1. On choisit la couleur puis la hauteur de la plus haute carte.
2. On choisit la hauteur, puis la dernière carte.
3. Choisir les deux hauteurs, puis 3 cartes parmi 4, et 2 cartes parmi 4.
4. Raisonner par différence en utilisant le résultat pour les quintes flush.
5. Raisonner par différence.

Exercice 20

1 - Déterminer le nombre de tiercés possibles dans une course avec 15 chevaux et pas d'ex-aequo.

2 - Déterminer le nombre de mots de quatre lettres, formés avec les 26 lettres de l'alphabet.

3 - De combien de façons peut-on garer 4 voitures distinctes dans un parking à 6 places ?

4 - On place 10 points distincts sur un cercle. Dénombrer le nombre de droites passant par deux de ces points.

Exercices type bac

Exercice 21 *Baccalauréat Centres étrangers 13 juin 2025*

Le codage « base64 », utilisé en informatique, permet de représenter et de transmettre des messages et d'autres données telles que des images, en utilisant 64 caractères : les 26 lettres majuscules, les 26 lettres minuscules, les chiffres de 0 à 9 et deux autres caractères spéciaux.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie, on s'intéresse aux séquences de 4 caractères en base64. Par exemple, « gP3g » est une telle séquence. Dans une séquence, l'ordre est à prendre en compte : les séquences « m5C2 » et « 5C2m » ne sont pas identiques.

1. Déterminer le nombre de séquences possibles.
2. Déterminer le nombre de séquences si l'on impose que les 4 caractères sont différents deux à deux.
3.
 - a. Déterminer le nombre de séquences ne comportant pas de lettre A majuscule
 - b. En déduire le nombre de séquences comportant au moins une lettre A majuscule.
 - c. Déterminer le nombre de séquences comportant exactement une fois la lettre A majuscule.
 - d. Déterminer le nombre de séquences comportant exactement deux fois la lettre A majuscule.

Partie B

On s'intéresse à la transmission d'une séquence de 250 caractères d'un ordinateur à un autre. On suppose que la probabilité qu'un caractère soit mal transmis est égale à 0,01 et que les transmissions des différents caractères sont indépendantes entre elles. On note X la variable aléatoire égale au nombre de caractères mal transmis.

1. On admet que la variable aléatoire X suit la loi binomiale. Donner ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité que tous les caractères soient bien transmis. *On donnera l'expression exacte, puis une valeur approchée à 10^{-3} près.*
3. Que pensez-vous de l'affirmation suivante : « La probabilité que plus de 16 caractères soient mal transmis est négligeable »?

Exercice 22 *Amérique du Sud 22 novembre 2024*

Dans cette partie, les résultats seront arrondis à 0,001 près.

Un donneur universel de sang est une personne de groupe sanguin O et de rhésus négatif. On considère que 7 % de la population française est de groupe O-.

1. On considère 50 personnes choisies au hasard dans la population française et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de donneurs universels.

Déterminer la probabilité que 8 personnes soient des donneurs universels.

2. Quel est le nombre minimal de personnes à choisir au hasard dans la population française pour que la probabilité qu'au moins une des personnes choisies soit donneur universel, soit supérieure à 0,999 ?

Exercice 23 Baccalauréat Métropole 17 juin 2025

On compte quatre groupes sanguins dans l'espèce humaine : A, B, AB et O.

Chaque groupe sanguin peut présenter un facteur rhésus. Lorsqu'il est présent, on dit que le rhésus est positif, sinon on dit qu'il est négatif.

Au sein de la population française, on sait que :

- 45 % des individus appartiennent au groupe A, et parmi eux 85 % sont de rhésus positif;
- 10 % des individus appartiennent au groupe B, et parmi eux 84 % sont de rhésus positif;
- 3 % des individus appartiennent au groupe AB, et parmi eux 82 % sont de rhésus positif.

On choisit au hasard une personne dans la population française.

On désigne par :

- A l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin A »;
- B l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin B »;
- AB l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin AB »;
- O l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin O »;
- R l'évènement « La personne choisie a un facteur rhésus positif ».

Pour un évènement quelconque E , on note \bar{E} l'évènement contraire de E et $p(E)$ la probabilité de E .

1. Recopier l'arbre ci-contre en complétant les dix pointillés.

2. Montrer que $p(B \cap R) = 0,084$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

3. On précise que $p(R) = 0,8397$.
Montrer que $p_O(R) = 0,83$.

4. On dit qu'un individu est « donneur universel » lorsque son sang peut être transfusé à toute personne sans risque d'incompatibilité.

Le groupe O de rhésus négatif est le seul vérifiant cette caractéristique.

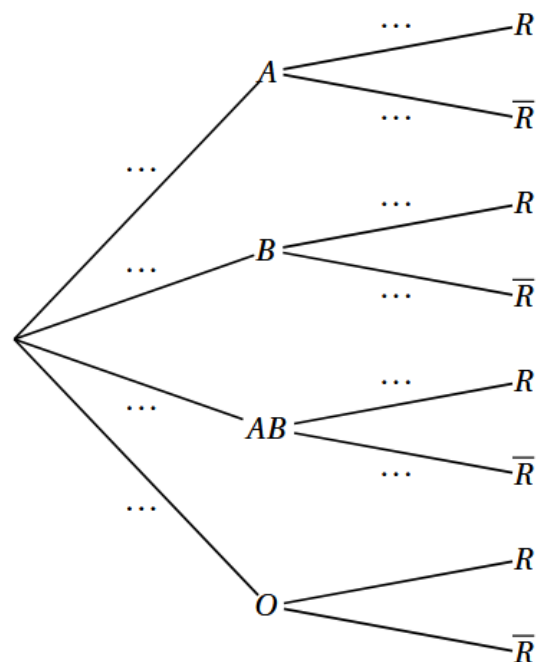
Montrer que la probabilité qu'un individu choisi au hasard dans la population française soit donneur universel est de 0,0714.

5. Lors d'une collecte de sang, on choisit un échantillon de 100 personnes dans la population d'une ville française. Cette population est suffisamment grande pour assimiler ce choix à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 100 personnes associe le nombre de donneurs universels dans cet échantillon.

a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Déterminer à 10^{-3} près la probabilité qu'il y ait au plus 7 donneurs universels dans cet échantillon.

c. Montrer que l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X est égale à 7,14 et que sa variance $V(X)$ est égale à 6,63 à 10^{-2} près.



Coefficients binomiaux par dénombrement

Exercice 24

Soit $1 \leq p \leq n$. On considère n boules et deux boîtes A et B . Un échantillon est constitué d'une boule dans la boîte A et de $p - 1$ boules dans la boîte B . En dénombrant de deux façons différentes ces échantillons, établir la formule

$$n \binom{n-1}{p-1} = p \binom{n}{p}.$$

Exercice 25

Soit E l'ensemble à 12 éléments $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$.

- Dénombrer les parties de E à 5 éléments qui contiennent
 - a et b ;
 - a mais pas b ;
 - b mais pas a ;
 - ni a , ni b .
- En déduire la relation

$$\binom{12}{5} = \binom{10}{3} + 2 \binom{10}{4} + \binom{10}{5}.$$

- Généraliser le résultat obtenu en prouvant, par un dénombrement, que pour $2 \leq p \leq n$, on a

$$\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + 2 \binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}.$$

- Retrouver le résultat précédent en appliquant la formule du triangle de Pascal.

Coefficients binomiaux par le calcul

On admet ici que $\forall p \leq n, \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ où $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$.

Exercice 26

Résoudre les deux équations suivantes, d'inconnue $n \in \mathbb{N}$:

- $4 \binom{n}{8} = \binom{n}{9}$, avec $n \geq 9$.
- $\binom{3n}{1} + \binom{3n}{2} + \binom{3n}{3} = 115n$, avec $n \geq 1$.

Exercice 27

Démontrer l'inégalité de Pascal par le calcul.

Exercice 28

On considère un ensemble à n éléments $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

On cherche à compter le nombre de sous-ensembles que l'on peut faire en prenant des éléments de n (sans répétitions).

- Combien y a-t-il de singletons (des ensembles à 1 élément) ?
- Combien y a-t-il de sous-ensembles à 5 éléments ?
- Combien y a-t-il de sous-ensembles à k éléments ? Avec $k \leq n$

- Justifier alors que le nombre de sous-ensembles de E est $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$.

- Autre méthode: Pour construire un sous-ensemble A de E , on vérifie si chaque élément de E appartient ou non à A . Il y a donc deux possibilités pour chaque élément de E . En déduire que :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Sources

ex 3 : bac S 2013 pondichéry

ex 5 : <https://www.kwyk.fr/exercices/mathematiques/tg/probabilites-conditionnelles/probabilite-conditionnelle/>

ex 20 :

ex 14,15 : https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Annee_spe_2025_DV.pdf

ex 24,25 et 26 : <https://www.bibmath.net/ressources/index.php?action=affiche&quoi=bde/proba/denombrement-binomiaux&type=fexo>

Correction 19

1. Il y a 4 choix pour la couleur. La couleur choisie, il suffit de choisir la plus haute carte de la main : il s'agit de n'importe quelle carte entre le 5 et l'as. Il y a donc 10 choix possibles pour la hauteur de la plus haute carte, et donc $4 \times 10 = 40$ mains conduisant à une quinte flush.
2. Il y a 13 choix possibles pour la hauteur de la carte constituant le carré (carré d'as, carré de rois,...). Cette hauteur fixée, il faut encore choisir une carte parmi les 48 autres pour compléter la main. Il y a donc $13 \times 48 = 624$ mains contenant un carré.
3. On choisit d'abord la hauteur des 3 cartes de même valeur. Il y a 13 choix. On choisit alors ces 3 cartes de même valeur. Il y a $\binom{4}{3} = 4$ choix possibles. On choisit ensuite la hauteur des deux autres cartes. Il reste 12 choix. Puis on choisit ces 2 cartes de même valeur. Il y a $\binom{4}{2} = 6$ choix. Finalement, le nombre de mains constituant un full est

$$13 \times 4 \times 12 \times 6 = 3744.$$

4. On va dénombrer d'abord le nombre de mains constituée de 5 cartes consécutives, qu'elles soient ou non de la même couleur. On retirera ensuite le nombre de quintes flush pour obtenir le nombre de mains constituées de 5 cartes qui ne sont pas toutes de la même couleur. Si on compte le nombre de mains constituées de 5 cartes consécutives, qu'elles soient ou non de la même couleur, alors on doit choisir la hauteur de la carte la plus haute. Comme précédemment, il y a 10 choix possibles. Ensuite, pour chacune des cinq hauteurs consécutives, on choisit l'une des 4 couleurs, ce qui fait 4^5 choix. Finalement, le nombre de mains correspondant est $10 \times 4^5 = 10240$ ce qui fait que le nombre de quintes est exactement $10240 - 40 = 10200$.

5. On compte le nombre de mains comprenant 3 cartes de même niveau et qui ne contient pas un carré : il y a 13 choix pour le niveau, $\binom{4}{3} = 4$ choix de 3 couleurs parmi 4 pour ce niveau. Puis, pour les deux autres cartes, il faut choisir deux cartes parmi 48 (on doit exclure la dernière carte de même hauteur, sinon on aurait un carré), soit $\binom{48}{2} = 48 \times 47/2 = 1128$ choix. Il y a donc $13 \times 4 \times 1128 = 58656$ mains contenant 3 cartes de même niveau, mais pas de carrés. Pour dénombrer le nombre de brelans, il faut retirer les fulls. Il y a donc $58656 - 3744 = 54912$ brelans. Attention au raisonnement faux suivant : on pourrait compter le nombre de mains comprenant 3 cartes de même niveau : il y a 13 choix pour le niveau, $\binom{4}{3} = 4$ choix de 3 couleurs parmi 4 pour ce niveau. Puis, pour les deux autres cartes, il faut choisir deux cartes parmi $52-3=49$, soit $\binom{49}{2} = 49 \times 48/2 = 1176$ choix. Il y a donc $13 \times 4 \times 1176 = 61152$ mains contenant 3 cartes de même niveau. Pour dénombrer le nombre de brelans, il faut retirer les carrés et les fulls. Il y a donc $61152 - 624 - 3744 = 56784$ brelans. Ce raisonnement est faux car quand on a compté le nombre de mains contenant 3 cartes de même niveau, on a compté 4 fois chaque carré. En effet, un carré d'as peut apparaître en choisissant d'abord as de coeur, de carreau, de trèfle, puis en complétant avec as de pique, ou en choisissant as de coeur, de carreau, de pique, puis en complétant avec as de trèfle, etc... Si on veut réaliser un dénombrement correct avec cette méthode, il faut retirer quatre fois le nombre de carrés, et on a bien $61152 - 4 \times 624 - 3744 = 54912$.