Les suites II *Variations et limites*

Compétence 1 : Variations

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n=2n^2-n$.

1) Calculer les trois premiers termes.
2) Conjecturer les variations de (u_n).
3) Etudier les variations de (u_n).

Exercice 2

On considère la suite (v_n) définie par : $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=n^2-18n+80$

Etudier les variations de (v_n).

Exercice 3

On considère la suite (w_n) définie par : $\forall n\in\mathbb{N}, w_n=\dfrac{2n+1}{n+3}$

Etudier les variations de (w_n).

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par : $\forall n\in\mathbb{N}, u_0=2$ et $u_{n+1}=u_n(1-2u_n)$

Etudier les variations de (u_n).

Exercice 5

On considère la suite (v_n) définie par : $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=\dfrac{1+3n}{2^n}$

Etudier les variations de (v_n).

Exercice 6

On considère la suite (w_n) définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*, w_n=\dfrac{3^n}{5n}$

Etudier les variations de (w_n).

Exercice 7

On considère la suite (x_n) définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*, x_1=1$ et $x_{n+1}=\dfrac{10x_n}{2n+1}$. On admet que (x_n) ne s'annule jamais.

Etudier les variations de (x_n).

Exercice 8

On considère la suite (a_n) définie par : $\forall n\in\mathbb{N}, \begin{cases} a_0=1 \\ a_{n+1}=a_n^2-2a_n+3 \end{cases}$

a. Calculer à la main a_0, a_1, a_2 et a_3.
b. Conjectuer le sens de variation de (a_n).
c. Montrer que pour tout réel x, $x^2-3x+3>0$
d. Démontrer votre conjecture.

Compétence 2 : Limite

Exercice 9

À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, conjecturer les limites éventuelles des suites suivantes.

1. $u_n = (-2)^n$ **2.** $v_n = \dfrac{3n+2}{6n+1}$

3. $w_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ **4.** $\begin{cases} z_0 = 2 \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{4} z_n - 3 \end{cases}$

Exercice 10

Conjecturer les limites de ces suites :

1. $u_n = \dfrac{1}{n} + 6$ 2. $u_n = n^2 - \dfrac{2}{n}$ 3. $u_n = -2n^2 + 3n - 1$ 4. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + 6$

Exercice 11

Conjecturer les limites de ces suites :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_1 = 1$ et $x_{n+1} = \dfrac{10 x_n}{2n+1}$ 2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_1 = 1$ et $x_{n+1} = \dfrac{1}{2x_n + 1}$

Exercice 12

Conjecturer les limites de ces suites :

1. $u_n = n^3 - 2n - 7$
2. $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{n}$
3. $u_n = \dfrac{2n^2 - 2n + 1}{n^2 - 3}$
4. $u_n = \dfrac{4n^2 + 1}{n(2n+1)}$
5. $u_n = \dfrac{3}{2\sqrt{n} + 7}$
6. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
7. $u_n = \sqrt{n^2 + n} - n$
8. $u_n = 1 - n^2$

Compétence 3 : Problèmes (avec algorithme)

Exercice 13

Le carbone 14 est un isotope radioactif utilisé en archéologie pour dater des échantillons carbonés. En effet, celui-ci est présent dans toute matière organique vivante en proportion constante. A la mort de l'organisme, en l'absence d'échanges avec l'environnement, le nombre d'atomes de carbone 14 diminue selon une loi mathématique connue.

1. On appelle demi-vie le temps nécessaire pour que le nombre de noyaux radioactifs d'un échantillon diminue de moitié. On modélise par une suite (u_n) le nombre de noyaux radioactifs présents dans un échantillon au bout de n demi-vies (n≥0). On notera n_0 le nombre initial de noyaux radioactifs.

   Définir par récurrence la suite (u_n) .
2. Quel est le type de la suite (u_n) ? En déduire une formule explicite.
3. On considère un échantillon qui ne contient plus que 12,5% de ses atomes radioactifs. Estimer l'âge de cet échantillon sachant que la demi-vie du carbone 14 vaut 5730 ans.

4. On considère que lorsque l'échantillon contient moins de 0,4% de son nombre initial d'atomes radioactifs, il n'est plus possible de procéder à une datation.

   Déterminer approximativement, à l'aide d'un algorithme Python, la date après laquelle toute datation est impossible.

Exercice 14

Tout élément radioactif est instable : ses atomes se désintègrent au cours du temps. On appelle période radioactive (ou demi-vie) le temps T au bout duquel la moitié des atomes, initialement présents dans un échantillon, se sont désintégrés.

Une centrale nucléaire produit différents déchets lors de son fonctionnement. Ces déchets, pour la plupart radioactifs, ne peuvent pas être traités de manière conventionnelle (recyclage, destruction, ..). La seule solution actuelle pour gérer ces déchets et de les stocker puis d'attendre que les atomes se désagrégent (entraînant une baisse de la radioactivité).

On considère l'isotope Krypton 85 (^{85}Kr) qui a une période radioactive d'environ 11 ans.
On a stocké un baril de 240 kg de Krypton 85 et on s'interroge sur la durée de conservation de ce baril.

1) Quelle est la masse de Krypton 85 contenu dans ce baril au bout de 11 ans ? 22 ans ?
Dans ce qui suit on note u_n la masse de Krypton 85 après 11n années.

2) **a** - Précisez $u_{0,}u_1$ et u_2

b - Expliquez pourquoi $u_{n+1}=0{,}5\,u_n$ pour tout entier naturel *n.*

c - Déduisez-en la nature de la suite u_n puis, pour tout entier *n*, une expression de u_n en fonction de *n.*

3) Quel est la masse de Krypton 85 contenu dans le baril au bout de 121 ans ?

4) On considère que le baril peut être ouvert et la masse de déchet traité lorsque la masse de Krypton 85 descend en dessous de 20 g.

Combien d'années doit être stocké ce baril ?

5) On souhaite utiliser un algorithme nous indiquant la durée de stockage nécessaire en fonction de la masse initiale et de la demi-vie de l'élément considéré. Le baril doit être stocké tant que la masse radioactive est supérieure à 20g.
Ecrire un tel algorithme.

Sources

exercice 6,8 : https://jaicompris.com/lycee/math/suite/suite-variation.php

exercice 9 : Manuel des élèves, déclic, 1ere spé, 98 p 162