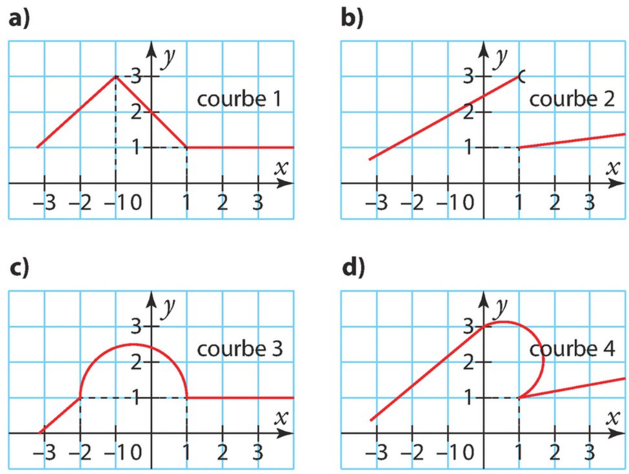
Continuité d'une fonction



Exercice 1

1) On donne les courbes suivantes. Lesquelles correspondent aux courbes d'une fontion continue.
2) A quels endroits la question de la continuité est-elle intéressante ?

Exercice 2

On considère la fonction $f : x \to \begin{cases} 2x+5 & \text{si} \quad x \leqslant -2 \\ x+3 & \text{si} \quad -2 < x \leqslant 5 \\ -2x+17 & \text{si} \quad x > 5 \end{cases}$.

f est-elle continue en -2 ?
f est-elle continue en 5 ?

Exercice 3

On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x - 3 & \text{si } x \leqslant -2 \\ x+1 & \text{sinon} \end{cases}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction f n'est pas continue en -2.
2. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

Exercice 4

Soit a et b deux réels. On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{si } x < 2 \\ x^2 + ax + b & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$.

Donner une condition sur les réels a et b pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ définie pour tout réel *x*.

1) f est-elle continue ?
2) f est-elle dérivable ?

T V I

Exercice 6

On donne le tableau de variations d'une fonction *f* définie sur $[0\,;+\infty[$.
Justifier que *f* n'admet qu'une unique solution sur $[0\,;+\infty[$.

x	0	3	$+\infty$
f	-2 ↘	$f(3)$ ↗	$+\infty$

Exercice 7

On donne le tableau de variations d'une fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

1) Comparer si possible f(-5) et f(-10) ; f(-3) et f(0) ; f(10) et f(1).
2) Déterminer les asymptotes éventuelles de *Cf*.
3) Déterminez le nombre de solutions de ces équations :
    1. f(x) = 0
    2. f(x) = 10
    3. f(x)+1 = 0
4) L'équation $[f(x)]^2-3f(x)-4 = 0$ admet-elle des solutions ?

Exercice 8

1) Démontrer que l'équation $x^3-0,5x^2+7x-7=0$ admet au moins une solution.
2) Déterminer une valeur d'une racine à 10^{-3} près.

Exercice 9

1) Déterminer le nombre de racines de la fonction $f(x)=1,5x^4+2x^3-6x^2+1$.
2) Déterminer un encadrement des racines à 10^{-3} près.

Algorithme

Exercice 10

La fonction $f(x)=x^3-2x-2$ admet une unique racine.
Ecrire un algorithme par **balayage** qui permet de déterminer un encadrement de cette racine à 10^{-3} près.

Exercice 11

La fonction $f(x)=0,1x^2-\cos x-2$ admet une unique racine sur $\mathbb{R}^+$.
Ecrire un algorithme par **balayage** qui permet de déterminer un encadrement de cette racine à 10^{-3} près.

Exercice 12

On considère la fonction $f(x)=x^3-x-1$.

1) Quel est son ensemble de définition ?
2) Démontrer qu'elle est continue.
3) Montrer que $f(1)\times f(2)<0$. En déduire que *f* admet une racine dans l'intervalle [1;2].
4) Ecrire un algorithme par **dichotomie** permettant de déterminer une valeur approchée à 0.001 près d'une telle racine de *f* dans [1;2].
5) Appliquer cet algorithme "à la main", vous compléterez un tableau.
6) Y a-t-il d'autres racines de *f* dans l'intervalle [1;2] ?

Exercice 13

On considère la fonction $f(x)=7-e^{0,21x+1}$.

1) Démontrer que cette fonction admet une unique racine.
2) Ecrire un algorithme par **dichotomie** permettant de déterminer la valeur approchée à 10^{-2} près de cette racine.
3) Appliquer cet algorithme "à la main", vous compléterez un tableau.

Exercice 14

Nous allons essayer d'estimer la rapidité d'éxécution de ces deux algorithmes.
Nous allons considérer qu'un tour de boucle (balayage ou dichotomie) prend 10ms.
Nous voulons approcher $\sqrt{2}$ qui est la racine positive de la fonction $f(x)=x^2-2$.

Combien d'étapes au maximum seront nécessaires pour l'algorithme de balayage ?
Combien de temps cela prendra-t-il ?

Combien d'étapes au maximum seont nécessaires pour l'algorithme de dichotomie ?
Combien de temps cela prendra-t-il ?

Suites

Exercice 15 *Métropole 17 juin 2025*

Pour tout entier naturel n, on note u_n la superficie de la zone, en hectare, recouverte par la posidonie au premier juillet de l'année $2024+n$. Ainsi, $u_0=1$.

Une étude conduite sur cette superficie a permis d'établir que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}=-0{,}02u_n^2+1{,}3u_n.$$

1. Calculer la superficie que devrait recouvrir la posidonie au premier juillet 2025 d'après ce modèle.

2. On note h la fonction définie sur $[0;20]$ par

$$h(x)=-0{,}02x^2+1{,}3x.$$

On admet que h est croissante sur $[0;20]$.

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $1\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 20$.

b. En déduire que la suite (u_n) converge. On note L sa limite.

c. Justifier que $L=15$.

Exercice 16

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 5$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$. On admet que la suite (u_n) est minorée par 0 et convergente vers ℓ. Déterminer ℓ.

Exercice 17

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = e^3$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$.

1. On admet que la suite (u_n) est minorée par 6 et convergente vers ℓ.
Déterminer ℓ.

2. Afficher la suite sur une calculatrice puis contrôler la valeur de ℓ trouvée.

Exercice 18

Soit la fonction f définie sur $I = [0 ; 1]$ par :

$$f(x) = 1{,}4x(1 - x).$$

1. a) Justifier que f est continue sur I.

b) Résoudre l'équation $f(x) = x$ dans I.

c) Montrer que la fonction f est croissante sur $[0 ; 0{,}5]$.

2. On définit la suite $u_0 = 0{,}1$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < 0{,}5.$$

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers ℓ puis déterminer ℓ.

Exercice 19

Soit la suite $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2} \end{cases}$.

Etudiez cette suite (variations, convergence, limite)

Exercices types bac

Exercice 20

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

et on appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = e^{\sqrt{x}}$.

a. Montrer que $g'(x) = f(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

b. Pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que :

$$f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 1\right)}{4x\sqrt{x}}.$$

2. a. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

b. Interpréter graphiquement ce résultat.

3. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$.
Dresser le tableau de variations de la fonction f en y faisant figurer les limites aux bornes de l'intervalle de définition.

c. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ et donner une valeur approchée à 10^{-1} près de cette solution.

Exercice 21

Un groupe de scientifiques, des spécialistes en environnement et des biologistes, étudient l'évolution d'une population de grenouilles autour d'un étang. Les biologistes estiment que le nombre de grenouilles présentes autour de l'étang peut être modélisé par la fonction P définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ où t est le temps écoulé depuis 2018, en années : $P(t)=\dfrac{1\,000}{0{,}4+3{,}6\mathrm{e}^{-0{,}5t}}$.

1. Étudier les variations de la fonction P sur $[0\,;+\infty[$.
2. Déterminer la limite de la fonction P en $+\infty$.
3. Montrer qu'il existe une unique valeur $t_0\in[0\,;+\infty[$ telle que $P(t_0)=2\,000$. Déterminer cette valeur à 10^{-1} près.
4. Selon ce modèle, déterminer au cours de quelle année la population de l'étang aura dépassé pour la première fois les 2 000 grenouilles.

Continuité : Exercices supplémentaires

Exercice A

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que,

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y)=f(x)+f(y).$$

1. Déterminer $f(0)$.
2. Démontrer que f est impaire.
3. Démontrer que, pour tout $n\geq 1$ et tout $x\in\mathbb{R}$, $f(nx)=nf(x)$.
4. Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{Z}$ et tout $x\in\mathbb{R}$, $f(nx)=nf(x)$.
5. Démontrer que pour tout nombre rationnel $r=\frac{p}{q}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$f\left(\frac{p}{q}x\right)=\frac{p}{q}f(x)$$

(on pourra écrire $p=q\times\frac{p}{q}$).

6. Conclure qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=ax$.

Exercice B

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue, et soient p,q deux réels strictement positifs. Démontrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $pf(a)+qf(b)=(p+q)f(c)$.

Sources

ex 1 : https://manuel.sesamath.net/numerique/diapo.php?atome=92561&ordre=1

ex 3,4 : https://www.mathoutils.fr/cours-et-exercices/terminale-generale/continuite-exercices-corriges/

ex 16,17,18,21 : https://manuel.sesamath.net/numerique/diapo.php?atome=92577&ordre=1

ex A,B : https://www.bibmath.net/ressources/index.php?action=affiche&quoi=mathsup/feuillesexo/limitecontinuite&type=fexo

Correction

Exercice A

1. On a $f(0)=0$. Ceci découle de $f(0)=f(0+0)=2f(0) \implies f(0)=0$.
2. Soit $x\in\mathbb{R}$. On applique la propriété vérifiée par f à x et à $y=-x$. Utilisant que $f(0)=0$, on trouve

$$0=f(x)+f(-x) \implies f(-x)=-f(x).$$

3. On remarque d'abord que $f(2x)=2f(x)$, puis, par récurrence sur n, que $f(nx)=nf(x)$. En effet, si la propriété est vraie au rang n, alors on a

$$f\big((n+1)x\big)=f(nx+x)=f(nx)+f(x)=(n+1)f(x).$$

4. Soit n est un entier négatif. Alors $-n$ est un entier positif et donc

$$f(-nx)=-nf(x).$$

Puisque f est impaire,

$$f(nx)=-f(-nx)=nf(x).$$

5. Soit maintenant $r=p/q$ un rationnel. Pour calculer $f(rx)$, l'astuce est d'écrire

$$f\left(q\times\frac{p}{q}x\right)=qf\left(\frac{p}{q}x\right)$$

d'une part et

$$f\left(q\times\frac{p}{q}x\right)=f(px)=pf(x)$$

d'autre part. De la sorte, on a $f(rx)=rf(x)$.
6. Posons $a=f(1)$. Alors on vient de prouver que $f(x)=xf(1)$ pour tout $x\in\mathbb{Q}$. Soit $x\in\mathbb{R}$ et (x_n) une suite de rationnels tendant vers x. Le passage à la limite dans $f(x_n)=x_nf(1)$ (licite car f est continue) donne $f(x)=xf(1)$. Comme une telle fonction vérifie l'équation fonctionnelle, on vient de prouver que les fonctions continues vérifiant $f(x+y)=f(x)+f(y)$ pour tous $x,y\in\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions linéaires.

Exercice B

Le réel $\frac{p}{p+q}f(a)+\frac{q}{p+q}f(b)$ est clairement un réel de l'intervalle $[f(a),f(b)]$ (ou $[f(b),f(a)]$ si $f(b)<f(a)$), puisqu'il s'écrit $\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$, avec $\lambda\in[0,1]$ qui est égal à $\frac{p}{p+q}$. Puisque la fonction f est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut trouver $c\in[a,b]$ tel que

$$f(c)=\frac{p}{p+q}f(a)+\frac{q}{p+q}f(b).$$

Multipliant par $p+q$, c'est exactement le résultat voulu.