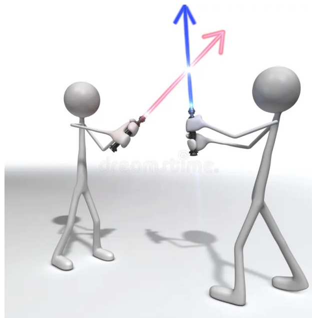
Produit scalaire dans l'espace



Exercice 1

On considère un cube ABCDEFGH de côté 3cm. I milieu de [HD] et O est le centre de la face EFGH.

Calculez les produits scalaires suivants *sans utiliser de coordonnées*:

a) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{HD}$

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{GH}$

c) $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{GC}$

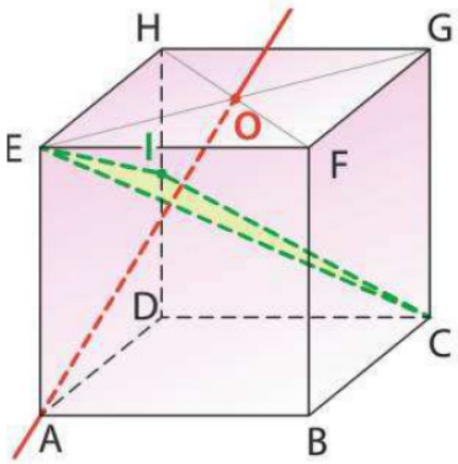
d) $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{ED}$

e) $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DG}$

f) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CE}$

g) $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{HE}$

h) $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AC}$



Calculez les produits scalaires suivants *en utilisant des coordonnées*:

i) $\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{EC}$

j) $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{DC}$

k) $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{AF}$

l) $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{OE}$

Exercice 2

Dans un repère orthonormé, on considère les 3 points suivants $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}$.

Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondi au dixième de degré.

Exercice 3

Dans un repère orthonormé, on considère les 3 points suivants $A\begin{pmatrix}10\\-5\\0\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$.

Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondi au dixième de degré.

Exercice 4

Dans un repère orthonormé, on considère les 3 points suivants $A\begin{pmatrix}6\\8\\2\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}4\\9\\1\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}5\\7\\3\end{pmatrix}$.

Montrez que ABC est un triangle rectangle.

Exercice 5

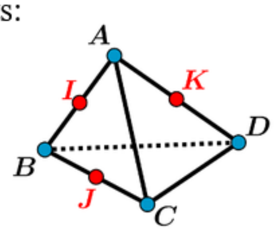
Dans un repère orthonormé, on considère les 3 points suivants $A\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}6\\1\\5\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}6\\-2\\-3\end{pmatrix}$.

ABC est-il rectangle ?

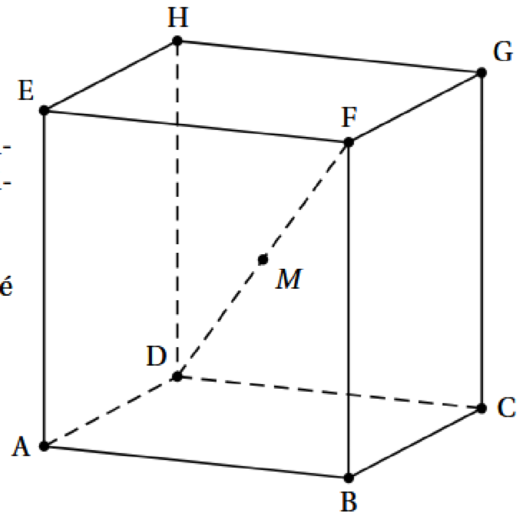
Exercice 6

ABCD est un tétraèdre régulier d'arête a.
I, J et K sont les milieux respectifs de [AB], [BC] et [AD].
Déterminer les produits scalaires suivants:

1) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$
2) $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{AJ}$
3) $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{CD}$
4) $\overrightarrow{JK} \cdot \overrightarrow{AD}$



Exercice 7 *Liban 2017*



On considère un cube ABCDEFGH dont la représentation graphique en perspective cavalière est donnée ci-contre.
Les arêtes sont de longueur 1.
L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(\text{D} ; \overrightarrow{\text{DA}}, \overrightarrow{\text{DC}}, \overrightarrow{\text{DH}}\right)$.

À tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$, on associe le point M du segment [DF] tel que $\overrightarrow{\text{D}M} = x\overrightarrow{\text{DF}}$.
On s'intéresse à l'évolution de la mesure θ en radian de l'angle $\widehat{\text{E}M\text{B}}$ lorsque le point M parcourt le segment [DF]. On a $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

1. Que vaut θ si le point M est confondu avec le point D ? avec le point F ?

2. a. Justifier que les coordonnées du point M sont $(x\,;\,x\,;\,x)$.

b. Montrer que $\cos(\theta) = \dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}$. On pourra pour cela s'intéresser au produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{M\text{E}}$ et $\overrightarrow{M\text{B}}$.

3. On a construit ci-dessous le tableau de variations de la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}.$$

x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
Variations de f	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0

Pour quelles positions du point M sur le segment [DF] :

a. le triangle MEB est-il rectangle en M ?

b. l'angle θ est-il maximal ?

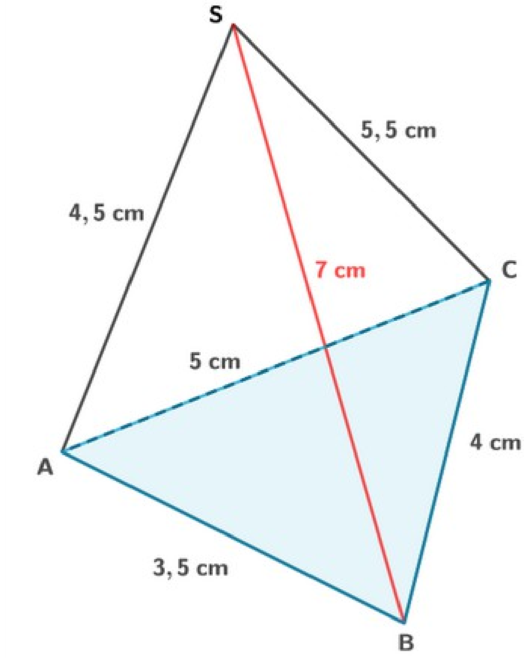
Exercice 8

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs tels que $\vec{u}\cdot\vec{v}=3$, $\vec{v}\cdot\vec{w}=5$, $\vec{u}\cdot\vec{w}=-1$ et $||\vec{u}||=4$.

1. Que vaut $2\vec{u}\cdot(3\vec{u}-2\vec{v}+4\vec{w})$?
2. Que vaut $(3\vec{v}-2\vec{u})\cdot(4\vec{w}+\vec{u})$?

Exercice 9

On considère le tétraèdre suivant.



Déterminer $\vec{SB}.\vec{SC}$

Exercice 10

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux tels que $||\vec{u}||=5$ et $||\vec{v}||=10$

Calculer $||\vec{u}+\vec{v}||$ et $||\vec{u}-\vec{v}||$.

Exercice 11

Dans un repère orthonormé, on considère les 3 points suivants $A\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}m\\0\\4\end{pmatrix}$.

1) Pour quelles valeurs de *m* les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$ sont-ils orthogonaux ?
2) Même question pour les vecteurs $\vec{AC}$ et $\vec{BC}$.

Exercice 12

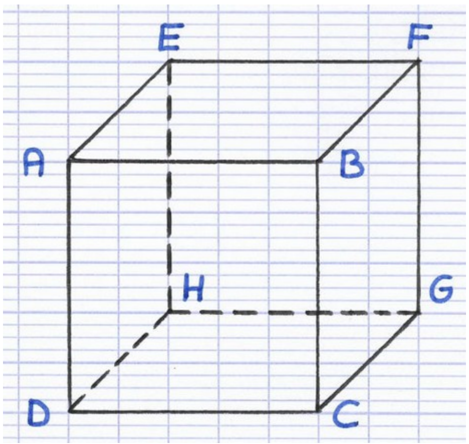
Dans un repère orthonormé, on considère les 3 points suivants $A\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}$.

Etudier la position relative des trois droites implicitement définies.

Exercice 13

On considère un cube quelconque.

(BH) et (EC) sont-elles perpendiculaires ?



Exercice 14

On considère les 4 points suivants définis dans un repère orthonormé:

$$A(-7,\ 12,\ -3),\ B(-2,\ 8,\ -1),\ C(2,\ 13,\ -1),\ D(-3,\ 17,\ -3)$$

Montrer que ABCD est un rectangle.

Exercice 15

Dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points :

$$A(-7,\ 12,\ -3),\quad B(-2,\ 8,\ -1),\quad D(-3,\ 17,\ -3)$$

et le vecteur :

$$\vec{n} = (-10,\ 8,\ 41).$$

1. Calculer les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$.
2. Montrer que les points A, B, D définissent un plan.
3. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABD).

Exercice 16

Même énoncé avec: $\boxed{A(12,-5,4),\quad B(7,3,-2),\quad C(15,1,6),\quad \vec{n}=(26,-4,-27)}$

Exercice 17

Dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points :

$$A(-2,\ 1,\ 0),\quad B(1,\ 3,\ 4),\quad C(0,\ 0,\ 1),\quad D(2,\ -3,\ 1).$$

On note (AB) et (CD) les droites correspondantes.

1. Donner un vecteur directeur de la droite (AB) et un vecteur directeur de la droite (CD).
2. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
3. Montrer que les droites (AB) et (CD) ne sont pas perpendiculaires.

On pourra raisonner par l'absurde pour faire la question 3.

Exercice 18

Dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points :

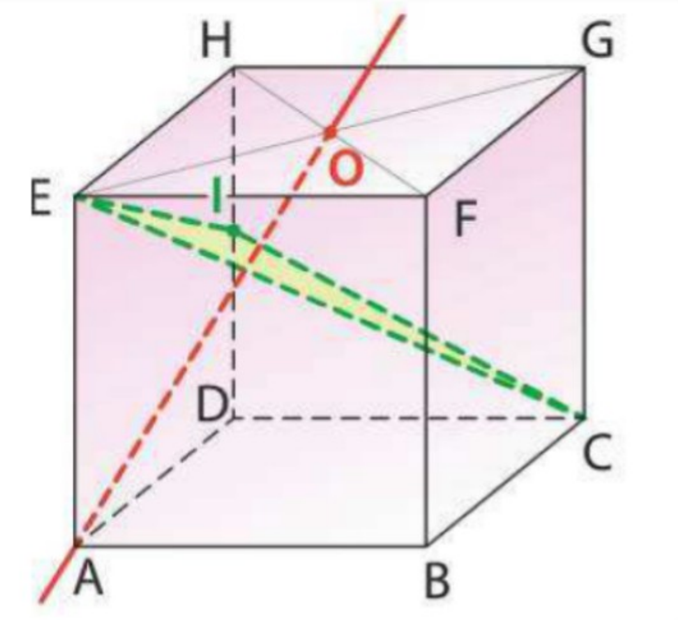
$$A(5,\ 1,\ 0),\quad B(1,\ -1,\ 2),\quad C(4,\ -1,\ 2),\quad D(2,\ 1,\ 0)$$

On note (AB) et (CD) les droites correspondantes.

1. Donner un vecteur directeur de la droite (AB) et un vecteur directeur de la droite (CD).
2. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
3. Vérifier si les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercice 19

ABCDEFGH est un cube d'arête 1. Le point I est le milieu de $[HD]$ et le point O est le centre de la face EFGH. On se propose de démontrer de deux manières différentes que la droite (AO) est perpendiculaire au plan (ECI).



A. Avec un repère

On choisit le repère orthonormé $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.

1. Quelles sont les coordonnées des points A, E, I, O, C?
2. Calculez $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{EI}$. Concluez.

B. sans repère

1. En écrivant que $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EO}$ et $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GC}$, calculez $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{EC}$.
2. En utilisant la relation de Chasles, calculez $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{EI}$. Concluez.

C. Déterminer les coordonnées du point d'intersection.

D. En déduire la distance du point A au plan (ECI).

Exercice 20

Dans l'espace muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les vecteurs suivants :

$$\vec{u} = (1,\ 1,\ 0), \qquad \vec{v} = (1,\ -1,\ 0), \qquad \vec{w} = (0,\ 0,\ 1).$$

1) Montrer que ces trois vecteurs forment une base de cet espace.
2) Est-ce une base orthonormée ?
3) Normaliser cette base *(c'est-à-dire transformer ces vecteurs pour obtenir des vecteurs de normes 1)*

Exercice 21

On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right), \quad \vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right), \quad \vec{w} = (0,\ 0,\ 1).$$

1. Calculer les normes de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.
2. Calculer les produits scalaires $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{w}$ et $\vec{v} \cdot \vec{w}$.
3. En déduire que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{x} = (2, 1, 3)$ dans cette base.

Sources

ex 6 : www.jybaudot.fr/Vecteursmatrices/exprscalespace.html

ex 8: https://www.mathoutils.fr/cours-et-exercices/terminale-generale/orthogonalite-dans-lespace-exercices-corriges/

ex 19: https://www.monlyceenumerique.fr/ts_maths/espace/espace2.html

Correction

Exercice 21 question 4

On peut faire un système (réponse attendue en terminale) ou bien raisonner directement (hors programme)

4. Coordonnées de $\vec{x}$ dans cette base

Dans une base orthonormée :

$$x_1 = \vec{x} \cdot \vec{u}, \quad x_2 = \vec{x} \cdot \vec{v}, \quad x_3 = \vec{x} \cdot \vec{w}.$$

Calcul :

$$x_1 = (2,1,3) \cdot \vec{u} = \frac{2+1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = (2,1,3) \cdot \vec{v} = \frac{2-1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_3 = 3.$$

Donc

$$[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 3 \right).$$