

Equation cartésienne et représentation paramétrique

Exercice 1

On considère la droite $d: \begin{cases} x=2t \\ y=1+t \\ z=-5+3t \end{cases}$ et les points $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- 1) Déterminer une représentation paramétrique de (AB) .
- 2) Etudier la position relative de d et (AB) .

Exercice 2

On considère la droite passant par $A \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- 1) Déterminer une représentation paramétrique de cette droite.
- 2) Est-ce que le point $B \begin{pmatrix} 20 \\ 17 \\ -2 \end{pmatrix}$ appartient à cette droite.

Exercice 3

On considère les deux droites $d_1: \begin{cases} x=9+3t \\ y=-10+t \\ z=-1+6t \end{cases}$ et $d_2: \begin{cases} x=7-12t \\ y=1-4t \\ z=-5+24t \end{cases}$

Montrer que ces deux droites sont parallèles et non-confondues.

Exercice 4

On considère les deux droites $d_1: \begin{cases} x=2+2t \\ y=-1+t \\ z=-2+3t \end{cases}$ et $d_2: \begin{cases} x=10+22t \\ y=3+11t \\ z=10+33t \end{cases}$

Etudier la position relative de ces deux droites.

Exercice 5

On considère la droite $d: \begin{cases} x=-5+8t \\ y=7-3t \\ z=1+2t \end{cases}$ et le point $A \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$.

- 1) Le point A appartient-il à la droite d ?
- 2) Déterminer la représentation paramétrique de la parallèle à d passant par A .

Exercice 6

Déterminer les équations cartésiennes des plans (on donne un vecteur normal et un point) :

$$P_1: A \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_2: B \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad P_3: C \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 7

Déterminer un vecteur normal et un point pour chacun de ces plans :

$$P_1: 3x-7y-1=0$$

$$P_2: x-y-3z=0$$

$$P_3: z-y-2x=2$$

$$P_4: z=y-x+2$$

$$P_5: 5=8x-5y+7z$$

$$P_6: x+\pi y-3=z$$

Exercice 8 Centres étrangers juin 2014

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points :

$$A(1; 2; 7), \quad B(2; 0; 2), \quad C(3; 1; 3), \quad D(3; -6; 1) \text{ et } E(4; -8; -4).$$

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit $\vec{u}(1; b; c)$ un vecteur de l'espace, où b et c désignent deux nombres réels.
 - a) Déterminer les valeurs de b et c telles que \vec{u} soit un vecteur normal au plan (ABC).
 - b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :
$$x - 2y + z - 4 = 0.$$
 - c) Le point D appartient-il au plan (ABC)?
3. On considère la droite \mathcal{D} de l'espace dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -4t + 5 \\ z = 2t - 1 \end{cases} \text{ où } t \text{ est un nombre réel.}$$

- a) La droite \mathcal{D} est-elle orthogonale au plan (ABC)?
 - b) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite \mathcal{D} et du plan (ABC).
4. Étudier la position de la droite (DE) par rapport au plan (ABC).

Exercice 9 Sujet métropole mai 2022

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

- le point A de coordonnées $(-1; 1; 3)$,
- la droite \mathcal{D} dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t, \\ z = 2 + 2t \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

On admet que le point A n'appartient pas à la droite \mathcal{D} .

1.
 - a. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur \vec{u} de la droite \mathcal{D} .
 - b. Montrer que le point B $(-1; 3; 0)$ appartient à la droite \mathcal{D} .
 - c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}$.
2. On note \mathcal{P} le plan passant par le point A et orthogonal à la droite \mathcal{D} , et on appelle H le point d'intersection du plan \mathcal{P} et de la droite \mathcal{D} . Ainsi, H est le projeté orthogonal de A sur la droite \mathcal{D} .
 - a. Montrer que le plan \mathcal{P} admet pour équation cartésienne : $2x - y + 2z - 3 = 0$.
 - b. En déduire que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9}; \frac{19}{9}; \frac{16}{9}\right)$.
 - c. Calculer la longueur AH. On donnera une valeur exacte.

Exercice 10 Asie mai 2022

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points

$$A(-3; 1; 3), B(2; 2; 3), C(1; 7; -1), D(-4; 6; -1) \text{ et } K(-3; 14; 14).$$

1.
 - a. Calculer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{DC} et \overrightarrow{AD} .
 - b. Montrer que le quadrilatère ABCD est un rectangle.
 - c. Calculer l'aire du rectangle ABCD.
2.
 - a. Justifier que les points A, B et D définissent un plan.
 - b. Montrer que le vecteur $\vec{n}(-2; 10; 13)$ est un vecteur normal au plan (ABD).
 - c. En déduire une équation cartésienne du plan (ABD).

3.
 - a. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale au plan (ABD) et qui passe par le point K.
 - b. Déterminer les coordonnées du point I, projeté orthogonal du point K sur le plan (ABD).
 - c. Montrer que la hauteur de la pyramide KABCD de base ABCD et de sommet K vaut $\sqrt{273}$.
4. Calculer le volume V de la pyramide KABCD.

Exercice 11 *Asie mai 2022*

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

$$A(-1; -1; 3), \quad B(1; 1; 2), \quad C(1; -1; 7)$$

On considère également la droite Δ passant par les points $D(-1; 6; 8)$ et $E(11; -9; 2)$.

1.
 - a. Vérifier que la droite Δ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 6 - 5t \\ z = 8 - 2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

- b. Préciser une représentation paramétrique de la droite Δ' parallèle à Δ et passant par l'origine O du repère.
 - c. Le point $F(1,36; -1,7; -0,7)$ appartient-il à la droite Δ' ?
2.
 - a. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.
 - b. Montrer que la droite Δ est perpendiculaire au plan (ABC).
 - c. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $4x - 5y - 2z + 5 = 0$.
3.
 - a. Montrer que le point $G(7; -4; 4)$ appartient à la droite Δ .
 - b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point G sur le plan (ABC).
 - c. En déduire que la distance du point G au plan (ABC) est égale à $3\sqrt{5}$.
4.
 - a. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
 - b. Calculer le volume V du tétraèdre ABCG.

Exercice 12 *Amerique du nord 2025*

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fautive puis justifier la réponse donnée. Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace.

On considère la droite D qui a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 + 3t \\ z = 1 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

et le plan P qui a pour équation cartésienne : $2x - 3y + z - 6 = 0$.

1. **Affirmation :** La droite D' , qui a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4 - 6t \\ z = 9 - 8t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \text{ est parallèle à la droite D.}$$

2. On admet que les points $A(-2; 3; 1)$, $B(1; 3; -4)$ et $C(6; 3; 9)$ ne sont pas alignés.

Affirmation : La droite D est orthogonale au plan défini par les trois points A, B et C.

3. **Affirmation :** La droite D est sécante avec la droite Δ qui a pour représentation

paramétrique : $\begin{cases} x = -4 + 2t' \\ y = 1 - 3t' \\ z = 2 + t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$

4. **Affirmation :** Le point $F(-3; -3; 3)$ est le projeté orthogonal du point $E(-5; 0; 2)$ sur le plan P.

5. **Affirmation :** Il existe exactement une valeur du paramètre réel a telle que le plan P' d'équation $-3x + y - a^2z + 3 = 0$ soit parallèle à la droite D.

Note du rédacteur « pour certaines questions, il est indispensable que le repère soit orthonormé. »